Série A, N° 3818
N° d'ordre 4669

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ES SCIENCES MATHEMATIQUES

PAR

Pierre LEFEBVRE

1re THESE. - « Sur certaines conditions minimales en théorie des demi-groupes ».

2e THESE. - « Propositions données par la Faculté ».

- 6 JUIN 1962

SOUTENUES LE DEVANT LA COMMISSION D'EXAMEN.

MM. PÉRÈS *Président*

DUBREIL, ZAMANSKY *Examinateurs*

1962

(Janvier 1961)

FACULTE DES SCIENCES DE L'UNIVERSITE DE PARIS

PROFESSEURS

Doyen ZAMANSKY

G. JULIA	T	Analyse supérieure et Algèbre supérieure
DE BROGLIE	T	Théories physiques
PRENANT	T	Anatomie et Histologie comparées
PERES	T	Mécanique des fluides et applications
BOURCART	T	Géographie physique et Géologie dynamique
PLANTEFOL	T	Botanique
GRASSÉ		Evolution des êtres organisés
PREVOST	T	Chimie organique
BOULIGAND	T	Analyse appliquée à la Géométrie
CHAUDRON	T	Chimie appliquée
WYART	T	Minéralogie et Cristallogr.
TEISSIER	T	Zoologie
MANGENOT	T	Biologie Vég. (ORSAY)
AUGER	T	Physique quantique et Relativité
MONNIER	T	Physiologie des Fonctions
PIVETEAU	T	Paléontologie
ROCARD	T	Physique (E.N.S.)
CARTAN	T	Mathématiques (E.N.S.)
LAFFITTE	T	Chimie Générale
FAVARD	T	Géométrie supérieure
COULOMB	T	Physique du Globe
M.le COUSIN	T	Biologie
CHRETIEN	T	Chimie minérale
DRACH	T	Zoologie
KASTLER	T	Physique (E.N.S.)
EPHRUSSI	T	Génétique
RIVIERE	T	Géologie (ORSAY)
GAUTHERET	T	Biologie (P.C.B.)
LUCAS R.	T	Recherches Physiques
THOMAS A.	T	Biologie cellulaire
ARNULF	T	Optique appliquée
MORAND	T	Physique Enseignement
SOLEILLET	T	Physique (P.C.B.)
FORTIER	T	Mécan. expérimentale des Fluides
DANJON	T	Astronomie
PETIT	T	Biologie maritime
QUENEY	T	Météorologie et dynamique atmosphérique
GALLIEN		Embryologie
EICHHORN	T	Biologie Végétale (P.C.B.)
DE CUGNAC	T	Biologie Végétale (S.P.C.N.)
M.le CAUCHOIS	T	Chimie Physique
THELLIER	T	Physique du Globe
L'HERITIER	T	Biologie Générale (ORSAY)
GRIVET	T	Radioélectricité (ORSAY)
PONCIN	T	Mécanique Générale
DUBREIL	T	Arithmétique et Théorie des Nombres
QUELET	T	Chimie Organique
CAGNIARD	T	Géophysique appliquée
CHAMPETIER	T	Chimie Macromoléculaire
CUVILLIER	T	Micropaléontologie
JUNG	T	Pétrographie
TRILLAT	T	Microscopie et diffraction électronique
WIEMANN	T	Chimie organique et struct.
VASSY	T	Spectroscopie (ORSAY)
JACQUINOT	T	Physique de l'Atmosphère
DESTOUCHES	T	Théories Physiques
PRUVOST	T	Géologie
AMIEL	T	Chimie des Solides
HOCART	T	Minéralogie et Cristallogr.
J. P. MATHIEU	T	Recherches Physiques
COUTEAUX	T	Biol. Animale (P.C.B.)
MAY	T	Zoologie (ORSAY)
CHOQUET	T	Théorie des fonctions et Topologie
FELDMANN	T	Biologie Végétale (P.C.B.)
GUINIER	T	Physique des solides (ORSAY)
JOST	T	Physiologie comparée
FORTET	T	Calcul des Probabilités
SCHWARTZ	T	Calcul diff. et Intégral
CHOUARD	T	Physiologie Végétale
MALAVARD	T	Aviation (Techn. Aéronaut.)
BRELOT	T	Calcul différentiel
NORMANT	T	Synthèse organique générale
BENARD	T	Chimie (E.N.S.C.P.)
BUVAT	T	Botanique (E.N.S.)
DUGUE	T	Statistiques Mathématiques
SOULAIRAC	T	Psychophysiologie
ULRICH	T	Physiologie Végétale (E.N.S.)
MARECHAL	T	Optique théorique et Appl.
KIRRMANN	T	Théories Chimiques
CHADEFAUD	T	Botanique
M.le LE BRETON	T	Physiologie
SALEM	T	Mathématiques générales
LELONG	T	Mathématiques générales
DEVILLERS	T	Anatomie et Histologie comparées
EHRESMANN	T	Topologie Algébrique
FRANÇON	T	Physique (S.P.C.N.)
GLANGEAUD	T	Géographie physique et Géologie dynamique
GODEMENT	T	Mathématiques (M.P.C.)
PISOT	T	Calcul des Probabilités
ROCH	T	Géologie
SCHATZMAN	T	Astrophysique
TERMIER	T	Paléontologie stratigraphique
ZAMANSKY	T	Mathématiques générales
LENNUIER	T	Physique (P.C.B.)

LEFEBVRE, PIERRE
1962
Annali di Matematica pura ed applicata
(IV), Vol. LIX, pp. 77-164

Sur certaines conditions minimales en théorie des demi-groupes.

Par PIERRE LEFEBVRE (à Beauvais, France)

INTRODUCTION (1).

1. On connaît l'intérêt et l'importance des conditions extrémales (conditions minimales ou conditions maximales) dans les différentes parties des mathématiques. Ces conditions se présentent naturellement lorsque, dans une théorie, intervient un ensemble ordonné. En théorie des demi-groupes, on remarque que deux ensembles, en particulier, jouent un rôle fondamental: l'ensemble $\mathfrak{S}(D)$ des parties d'un demi-groupe D, ordonné par l'inclusion, et l'ensemble $\mathfrak{T}(D)$ des équivalences définies sur D, ordonné par la relation d'ordre usuelle.

Certains éléments de $\mathfrak{S}(D)$ peuvent être définis par une propriété caractéristique P; par exemple, une partie non vide H de D, ou complexe, ($H \in \mathfrak{S}(D)$, $H \neq \emptyset$) est dite *nette à droite* si, pour tout $a \in D$, il existe $x \in D$ tel que $ax \in H$. Il est alors souvent intéressant d'étudier les demi-groupes qui admettent des parties minimales pour cette propriété P; ces parties sont les points ou atomes des sous-ensembles de $\mathfrak{S}(D)$ définis par P. Car on obtient ainsi des demi-groupes dont la structure peut être décrite avec assez de précision. En outre, la notion de demi-groupe est si générale qu'il est toujours avantageux d'en obtenir des types particuliers: la classification — qui reste à faire — ne peut que tirer parti d'un choix assez étendu de types différents de demi-groupes, et ceux qu'on obtient à partir de conditions extrémales sont souvent parmi les plus intéressants.

2. La propriété P considérée à l'origine de ce travail a été celle, pour un complexe, d'être *net*. Cette notion, introduite par P. DUBREIL [9] à propos de la recherche des groupes homomorphes à un demi-groupe, est à l'origine de nombreux travaux. Parmi ceux-ci, ceux de A. H. CLIFFORD [2], [3], [4], D. D. MILLER [4] et G. THIERRIN [33] ont plus particulièrement guidé notre recherche.

(1) Les numéros entre crochets renvoient à la bibliographie placée à la fin de ce travail.

R. UNIV. BIBLIOTHEEK LEIDEN

A. H. CLIFFORD et D. D. MILLER ont étudié les demi-groupes possédant des éléments nets, ou, dans leur terminologie, des éléments zéroïdes. G. THIERRIN a repris dans sa thèse [33] l'étude de ces demi-groupes, auxquels il donne le nom d'*homogroupes*. Suivant une suggestion de P. DUBREIL [13], nous avons d'abord étudié les complexes nets minimaux, en remarquant au passage que les élément zéroïdes de CLIFFORD en sont des cas particuliers.

Mais, ce faisant, il s'est avéré que cette généralisation pouvait être poussée plus loin. En considérant que la propriété pour un complexe d'être net à droite, par exemple, est équivalente à la propriété, pour ce complexe, d'avoir un résidu à droite vide [12], nous avons finalement tenté de décrire la structure des demi-groupes admettant des *complexes minimaux pour la propriété d'avoir un résidu donné* W (complexes W-minimaux). Cette généralisation offre l'avantage de donner des résultats non triviaux dans le cas des demi-groupes avec zéro.

La résolution de ce problème est l'objet principal du chapitre I.

Bien que le degré de généralité auquel nous sommes parvenus paraisse en définitive assez grand — le demi-groupe D n'étant supposé à priori ni commutatif, ni unitaire, ni sans zéro — il faut souligner que nous avons introduit au cours de notre étude certaines hypothèses supplémentaires. Les complexes K auquels nous imposons d'être W-minimaux sont *dégagés de leur résidu* W ($K \cap D^2 \cap W = \emptyset$), ce qui entraîne que W doit être *fortement large à droite* ($W \cdot D = W$). Nous n'obtenons même des renseignements précis sur la structure de D que dans le cas où W est un idéal *réflectif* ($ab \in W \Longleftrightarrow ba \in W$).

Nous devons également noter que la notion de « côté » joue un rôle important dans ce travail : la notion de résidu peut être en effet considérée d'un point de vue monolatère [12] ou bilatère [8]. Mais cette distinction n'empêche pas les résultats de présenter une grande unité. Ainsi, entre deux complexes W-minimaux, on peut, quel que soit le point de vue considéré, établir une correspondance biunivoque.

De même, l'existence de complexes W-minimaux, d'un côté ou bilatères, dans un demi-groupe D, est liée à celle d'idéaux que nous avons nommés W-minimaux : un idéal I, d'un côté ou bilatère, est W-minimal s'il couvre $I \cap W$. Cette notion généralise les notions classiques d'idéal minimal [5], [23]. Dans tous les cas, l'existence de complexes W-minimaux entraîne celle d'idéaux W-minimaux du même côté, et la réciproque est vraie moyennant une hypothèse supplémentaire. En particulier, prenant $W = \emptyset$, on voit que l'existence de complexes nets d'un côté minimaux équivaut à celle d'idéaux du même côté minimaux et que les demi-groupes admettant des complexes bilatèrement nets minimaux sont les demi-groupes à idéal bilatère minimum ou demi-groupes à noyau [8].

Si l'on compare la réunion R des complexes W-minimaux, d'un côté ou bilatères, et la réunion Σ des idéaux W-minimaux du côté correspondant on obtient la relation simple $\Sigma = R + W$; en particulier si $W = \emptyset$, $\Sigma = R$.

Nous avons étudié la structure de R lorsque W est réflectif. Un des principaux résultats est le suivant : si D est un demi-groupe admettant des complexes W-minimaux à droite, pour un idéal réflectif W fortement large à droite, l'ensemble R de ces complexes a la structure suivante : $R = Z + \sum_{\iota \in I} C_\iota$ avec $R\bar{Z}$, $\bar{Z}R$ et Z^2 contenus dans W. Les C_ι sont des demi-groupes simples, sommes de leurs idéaux à droite minimaux, et, pour tout ι, $\lambda \in I$, $\iota \neq \lambda$, on a : $C_\iota C_\lambda \subseteq W$.

S'il existe à la fois des complexes W-minimaux à droite, dont la réunion est R, et des complexes W-minimaux à gauche, dont la réunion est R', les C_ι sont les mêmes dans les décompositions canoniques de R et de R' et ce sont des demi-groupes complètement simples. Enfin, si D contient des complexes W-minimaux bilatères, leur réunion se décompose encore comme dans le cas précédent et les C_ι correspondants sont des demi-groupes simples.

Les réciproques de ces théorèmes s'énoncent et se démontrent facilement. En particulier, on en déduit que *les demi-groupes admettant à la fois des complexes nets à droite minimaux et des complexes nets à gauche minimaux ne sont autres que les demi-groupes admettant un idéal bilatère complètement simple.*

On trouvera enfin dans le chapitre I une étude comparative des conditions suivantes, à priori distinctes :

(A) S est un sous-demi-groupe et un complexe W-minimal.

(B) S est un sous-demi-groupe W-minimal.

Ces deux conditions sont en fait équivalentes. Nous donnons la structure des demi-groupes possédant des sous-demi-groupes W-minimaux dans le cas où W est réflectif.

3. La notion d'homogroupe, qui est à l'origine de nombreux résultats du chapitre I, a également guidé nos recherches au début du chapitre II. Car un homogroupe est un demi-groupe contenant un groupe comme idéal, et ce groupe est, en un certain sens, le plus grand groupe homomorphe au demi-groupe. Cette interprétation nous a conduits à revenir, après P. DUBREIL [12], F. W. LÉVI [16] et STOLL [25] sur les homomorphismes appliquant un demi-groupe D sur un groupe G^* ou un groupe avec zéro $\bar{G}$, avec cette arrière

pensée d'obtenir des renseignements sur les demi-groupes pour lesquels existe une plus fine équivalence régulière $\mathcal{S}$ telle que $D/\mathcal{S}$ soit un groupe.

Le rôle essentiel dans ce chapitre est joué par un isomorphisme d'ensembles ordonnés entre l'ensemble des sous-groupes de G^* et un ensemble de sous-demi-groupes particuliers de D. Chemin faisant, nous avons été amenés à étudier systématiquement les complexes de D dont l'image homomorphe est un sous-groupe de G^* et surtout à préciser une correspondance entre certains sous-demi-groupes réflectifs unitaires d'un demi-groupe D et ceux d'un idéal quelconque de D. Cette dernière étude explique un résultat déjà signalé par M. P. SCHUTZENBERGER [21]: un demi-groupe et un idéal de ce demi-groupe admettent les mêmes groupes homomorphes.

Mais le résultat le plus important de ce chapitre est sans doute la mise en évidence d'une classe remarquable de demi-groupes: celle des *demi-groupes admettant un sous-demi-groupe normal unitaire minimum*; dans ces demi-groupes, les sous-demi-groupes normaux unitaires [12] constituent une généralisation particulièrement satisfaisante de la notion de sous-groupe distingué dans un groupe. Par exemple, ils forment un treillis complet modulaire.

Les exemples que nous donnons de ce type de demi-groupe montrent que ceux-ci forment une classe très large de demi-groupes; on y trouve, par exemple, les demi-groupes simples sans zéro avec idempotent, les demi-groupes simples sans idempotent sommes de leurs idéaux d'un côté minimaux, les demi-groupes admettant des complexes nets d'un côté minimaux, les demi-groupes inversés et rectangulaires [31], les demi-groupes de VAGNER [34], les demi-groupes de torsion. Cette liste, bien entendu, n'est pas exhaustive.

Notons encore qu'en appliquant à D et à G les théorèmes d'isomorphisme démontrés par P. DUBREIL [11] pour des groupoïdes quelconques, nous obtenons deux théorèmes d'isomorphisme qui généralisent les théorèmes classiques connus pour les groupes.

4. Le chapitre III est encore lié d'une certaine manière à la recherche de la plus fine équivalence régulière telle que le demi-groupe quotient soit un groupe. Car, sachant qu'il existe, pour un demi-groupe quelconque, une plus fine équivalence régulière et simplifiable, c'est-à-dire, en un certain sens, un plus grand semi-groupe homomorphe, et cherchant à quelles conditions ce semi-groupe est un groupe, nous avons été amené à donner une construction de la plus fine équivalence simplifiable, puis de la plus fine fine équivalence régulière et simplifiable définies sur D.

Le procédé employé permet d'ailleurs de traiter des problèmes voisins, par exemple, de construire les équivalences analogues pour lesquelles chaque complexe d'une famille donnée de D est indivisible. La construction trouvée éclaire aussi la démonstration d'un théorème de G. THIERRIN [30], caractéri-

sant les groupes comme semi-groupes dans lesquels les équivalences simplifiables d'un côté sont régulières du même côté. En prenant comme généralisation de la notion de semi-groupe celle de demi-groupe stationnaire, on peut caractériser de la même façon les demi-groupes inversés et rectangulaires. Ceux-ci, qui sont des demi groupes à sous-demi-groupe normal unitaire minimum, possèdent des propriétés qui généralisent de façon intéressante certaines propriétés des groupes. En particulier, ceux qui sont globalement idempotents admettent un sous-demi-groupe normal unitaire minimum égal à l'ensemble des idempotents.

Il apparaît ainsi, tout au long de ce travail, que les conditions minimales fournissent en général des propriétés fortes dont l'étude est particulièrement fructueuse.

5. Je tiens à exprimer ici ma profonde reconnaissance à Messieurs PAUL DUBREIL et ROBERT CROISOT, dont les encouragements et les conseils m'ont été infiniment précieux, tant au cours de mon initiation à la recherche que lors de la rédaction de ce travail.

Je suis également très heureux de remercier Madame DUBREIL-JACOTIN et Monsieur LESIEUR, auprès de qui j'ai toujours trouvé l'accueil le plus favorable, et d'utiles conseils.

Monsieur le Doyen ZAMANSKY a bien voulu s'intéresser à mon travail et me donner un second sujet, et Monsieur le Doyen PÉRÈS m'a fait l'honneur de présider mon jury de thèse. Je les en remercie très vivement.

CHAPITRE I.

Demi-groupes admettant des complexes minimaux pour un résidu mono ou bilatère donné.

1. Propriétés des complexes admettant un résidu à droite donné, dégagés de ce résidu, et minimaux.

1°) Dans ce chapitre, D représente, sauf mention du contraire, un demi-groupe quelconque, non commutatif, avec ou sans élément neutre, possédant éventuellement un zéro. Nous utiliserons fréquemment, pour étudier D, le demi-groupe des parties $\mathfrak{P}(D)$, ordonné par l'inclusion et résidué.

Nous renvoyons, pour les notions fondamentales sur les demi-groupes, au chapitre V de l'Algèbre de P. DUBREIL [12], et pour celles concernant les ensembles ordonnés et la résiduation, aux Leçons sur les Treillis de M. L. DUBREIL-JACOTIN, LESIEUR et CROISOT [14].

2°) Notre point de départ est la notion de résidu à droite d'un complexe de D. Dans un demi-groupe D, le *résidu à droite* W_H d'un complexe H est l'ensemble des éléments w de D vérifiant la condition $H \cdot w = \emptyset$. C'est

un idéal à droite [9], [12]. Un cas très particulier de cette notion est celui où l'on a $W_H = \emptyset$. On dit alors que H est *net à droite*, [9], [12].

La notion de complexe dégagé d'un autre complexe conduit à un cas moins particulier qui figure déjà implicitement dans [6] et [12].

DÉFINITION 1.1. - *H et M étant des complexes de D, on dit que H est dégagé de M si* $H \cap D^2 \cap M = \emptyset$.

Si on remarque que H et $H \cap D^2$ ont même résidu à droite, on voit que la condition $H \cap D^2 \cap W_H = \emptyset$ qui exprime que *H est dégagé de son résidu à droite*, peut être aussi intéressante à considérer que la condition plus forte $H \cap W_H = \emptyset$ (H disjoint de son résidu à droite).

3°) Inversement, un idéal à droite W est résidu à droite si et seulement s'il vérifie la condition :

$$(F) \qquad WD^{\cdot}.D \subseteq W$$

qui s'écrit encore, puisqu'on a $W \subseteq WD^{\cdot}.D$:

$$(F') \qquad WD^{\cdot}.D = W.$$

Un idéal à droite vérifiant (F) ou (F') est dit *fermé à droite*, [10]. On sait que tout idéal à droite premier est fermé à droite, [10].

4°) Nous nous proposons d'étudier l'ensemble $\mathcal{H}$ des complexes H ayant pour résidu à droite un idéal fermé à droite W et en outre *dégagés de ce résidu*. $\mathcal{H}$, ordonné par l'inclusion, est stable pour la réunion. En effet soit $H^* = \bigcup_{\iota \in I} H_\iota$, $H_\iota \in \mathcal{H}$. On sait que $K \subseteq H$ entraîne $W_H \subseteq W_K$, [9], [12].

On a donc $W_{H^*} \subseteq W$. Montrons qu'on a aussi $W \subseteq W_{H^*}$ ou encore $D - W_{H^*} \subseteq D - W$.

Si $a \in D - W_{H^*}$, il existe $x \in D$ tel que $ax \in H^*$; donc il existe $\iota \in I$ tel que $ax \in H_\iota$. Puisque $W_{H_\iota} = W$, il en résulte que $a \in D - W$.

$\mathcal{H}$ n'est pas stable en général pour l'intersection, comme le montre le contre-exemple suivant. Prenons pour D le demi-groupe à cinq éléments a, b, c, d, e (n° 393 de [26]) dont la table de multiplication est la suivante :

	a	b	c	d	e
a	a	b	a	b	a
b	a	b	a	b	a
c	c	d	c	d	c
d	c	d	c	d	c
e	a	b	c	d	e

Le complexes $H_1 = \{a, e\}$ et $H_2 = \{b, e\}$ ont pour résidu à droite $W = \{c, d\}$ et ils en sont disjoints, donc dégagés. Mais $H_1 \cap H_2 = \{e\}$ a pour résidu à droite $W' = \{a, b, c, d\}$.

Nous nous intéresserons en particulier aux « points » ou « atomes » de $\mathcal{K}$: un tel point K est dit *complexe W-minimal à droite*. Pour $W = \emptyset$, on retrouve les *complexes nets à droite minimaux* [13], [CR1].

5°) Les propositions suivantes mettent en évidence certaines conséquences de l'hypothèse « dégagé du résidu W » qui nous seront utiles par la suite. Nous verrons d'ailleurs que cette hypothèse entraîne pour W une propriété plus forte que « fermé à droite », et qui est nécessaire pour qu'il existe des complexes W-minimaux à droite.

LEMME 1.1. - *Soit H un complexe du demi-groupe D dont le résidu à droite W_H est contenu dans un idéal à droite W; $W_H \subseteq W$. Si H est dégagé de W, on a l'égalité $W_H = W$.*

Démontrons l'inclusion $D - W_H \subseteq D - W$; si $a \in D - W_H$, il existe $x \in D$ tel que $ax \in H$; si $a \in W$, on a $ax \in W \cap H \cap D^2$ en contradiction avec l'hypothèse « H dégagé de W ». Donc $a \in D - W$.

Puisque $K \subseteq H$ entraîne $W_H \subseteq W_K$, on déduit de ce lemme le

COROLLAIRE 1.1. - *Si l'on a $K \subseteq H$ et si H est dégagé du résidu à droite W_K de K, les résidus à droite de H et de K sont égaux : $W_H = W_K$.*

Ce corollaire généralise la propriété évidente : tout complexe contenant un complexe net d'un côté est net du même côté.

LEMME 1.2. - *Si un complexe H est dégagé de son résidu à droite W_H, on a :*

$$W_{H-(H\cap W)} = W_H .$$

Il suffit de démontrer l'inclusion $D - W_H \subseteq D - W_{H-(H\cap W)}$. Si $a \in D - W_H$ il existe $x \in D$ tel que $ax \in H$; $ax \notin W_H$ sinon $H \cap D^2 \cap W_H \neq \emptyset$, en contradiction avec l'hypothèse « H dégagé de W_H ». Donc $ax \in H - (H \cap W)$, c'est-à-dire $a \in D - W_{H-(H\cap W)}$.

COROLLAIRE 1.2. - *Si W est un idéal fermé à droite, tout complexe W-minimal à droite (s'il en existe) est disjoint de W.*

Pour tout idéal à droite W, on a $W \subseteq WD \cdot . D \subseteq W \cdot . D$; le lemme suivant montre que la condition « fermé à droite » pour un idéal à droite W doit être renforcée si l'on cherche les complexes W-minimaux.

LEMME 1.3. - *Pour qu'un idéal à droite $W (W \neq D)$ soit le résidu d'au moins un complexe dégagé de W, il faut et il suffit que W vérifie la condition :*

$$(L) \qquad W \cdot . D = W$$

qui s'écrit encore (L') $aD \subseteq W$ $(a \in D)$ entraîne $a \in W$.

La condition (L) est *nécessaire* [10] : supposons que W soit résidu à droite du complexe H dégagé de W, et que $a \in D$, $aD \subseteq W$; si $a \notin W$, il

existe $x \in D$ tel que $ax \in H$, d'où puisque $aD \subseteq W$, $ax \in H \cap D^2 \cap W$, en contradiction avec l'hypothèse « H dégagé de W ».

La condition (L) est *suffisante* ; remarquons d'abord qu'elle entraîne la condition (F) ; donc si l'idéal à droite $W (W \neq D)$ vérifie la condition (L), W est fermé à droite et par suite est résidu à droite de certains complexes de D (par exemple, de tout complexe compris entre $D - WD$ et $D^2 - WD$, [10]).

Si $a \in D - W$, il existe $x \in D$ tel que $ax \notin W$ (car $aD \subseteq W$ entraîne $a \in W$). Le complexe $H = \{ax ; ax \notin W\}$, est disjoint de W, contenu dans D^2, donc dégagé de W. Montrons que $W_H = W$. Si $a \in D - W$, il existe $x \in D$ tel que $ax \in H$, par définition de H. Si $a \in D - W_H$, il existe $x \in D$ tel que $ax \in H$; alors $a \notin W$, car sinon $ax \in H \cap W$, en contradiction avec $H \cap W = \emptyset$.

DÉFINITION 1.2. - *Un idéal à droite W de D vérifiant la condition (L) : $W \cdot D = W$, est dit fortement large à droite.*

D'après [10], théorèmes 6 et 8, un tel idéal à droite est bien un idéal large (²) ; de plus, tout idéal à droite premier $\mathfrak{p} \neq D$ est fortement large à droite.

Le tableau suivant met en évidence les implications reliant les diverses conditions étudiées pour les idéaux à droite de D, considérés comme résidus à droite de certains complexes de D.

Idéal $\emptyset$	$\Rightarrow$	Idéal à droite premier	$\Rightarrow$	Idéal à droite fortement large à droite	$\Rightarrow$	Idéal à droite fermé à droite
$\Updownarrow$		$\Updownarrow$		$\Updownarrow$		$\Updownarrow$
Résidu d'un complexe net à droite de D	$\Rightarrow$	Résidu à droite d'un complexe de D dégagé de ce résidu	$\Rightarrow$	Résidu à droite d'un complexe de D.		

Soit W un idéal à droite dans un demi-groupe D ; pour que D admette des complexes W-minimaux à droite, il est nécessaire, d'après le lemme 1.3, que W soit fortement large à droite. Cette condition n'est pas suffisante : par exemple, un demi-groupe cyclique infini ne possède pas de complexes $\emptyset$-minimaux (complexes nets minimaux), [13], bien que $\emptyset$ soit un idéal fortement large à droite.

Plus généralement, si W est un demi-groupe quelconque et D' un demi-groupe cyclique infini, l'ensemble $D = D' \cup W$ peut être muni d'une structure de demi-groupe : on conserve pour cela l'opération originale dans D' et dans W et, pour $w \in W$ et $x, y \in D'$, on pose $wx = yw = w$. W est alors un idéal premier de D, donc un idéal fortement large à droite. Comme il y a identité entre les complexes W-minimaux à droite de D et les complexes nets à droite minimaux de $D' = D - W$ on voit que D n'admet pas de complexes W-minimaux à droite.

(²) Car un idéal a droite *large* $\mathfrak{m}$ peut se caractériser par la condition :

$$(\mathfrak{m} \cdot D) \cap (D - D^2) \subseteq \mathfrak{m}.$$

Dans toute la suite de ce chapitre, nous supposons que les idéaux qui interviennent comme résidus d'un côté sont fortement larges de ce côté.

6°) Nous étudions maintenant les propriétés des complexes K, dégagés de leur résidu à droite W, et minimaux pour la condition $W_K = W$ (complexes W-minimaux à droite).

LEMME 1.4. - *Soient K un complexe dégagé de son résidu à droite $W_K = W$ et k un élément de K. Pour que $K - \{k\}$ admette W pour résidu à droite, il faut et il suffit que $k(K \cdot k) \neq \{k\}$.*

Cette proposition généralise le lemme 1 de [13].

Supposons que $K - \{k\}$ admette W pour résidu à droite. Si $K \cdot k = \emptyset$, on a bien $k\emptyset = \emptyset \neq \{k\}$; si $K \cdot k \neq \emptyset$, $k \notin W_K = W_{K-\{k\}} = W$. Il existe donc $x \in D$ tel que $kx \in K - \{k\}$, d'où $k(K \cdot k) \neq \{k\}$.

Inversement, supposons que, pour $k \in K$, on ait $k(K \cdot k) \neq \{k\}$, K étant dégagé de W. Pour démontrer l'égalité $W_K = W_{K-\{k\}}$, il suffit de prouver l'inclusion $D - W_K \subseteq D - W_{K-\{k\}}$. Soit $a \in D - W_K$ et $x \in D$ une solution de $ax \in K$; si $ax \in K - \{k\}$, $a \notin W_{K-\{k\}}$. Sinon, $ax = k$, d'où $k \in D^2 \cap K$, puis $k \notin W$ puisque $K \cap D^2 \cap W = \emptyset$; il existe alors, par hypothèse, dans le quotient non vide $K \cdot k$, un élément m tel que $km = k' \neq k$ c'est-à-dire $axm = k' \in K - \{k\}$ d'où $a \notin W_{K-\{k\}}$. De ce lemme résulte immédiatement le théorème suivant:

THÉORÈME 1.1. - *Pour qu'un complexe K dégagé de son résidu à droite W soit W-minimal à droite, il faut et il suffit que, pour tout $k \in K$ on ait $k(K \cdot k) = \{k\}$.*

REMARQUE. - La condition: $\forall k \in K$, $k(K \cdot k) = \{k\}$, entraîne: $\forall k \in K$, $K \cdot k \neq \emptyset$, c'est-à-dire K *disjoint de* W, comme on l'avait déjà vu au corollaire 1.2.

REMARQUE. - Si W est premier, $D - W$ est un sous-demi-groupe de D contenant K; dans $D - W$, K est net à droite minimal. Nous reviendrons par la suite sur cet important cas particulier.

COROLLAIRE 1.3. - *Si S est à la fois un sous-demi-groupe de D et un complexe W-minimal à droite, on a, pour tout $s \in S$, $sS = \{s\}$, c'est-à-dire que tout élément de S est permis à droite dans S.*

On a en effet, pour tout $s \in S$, $s(S \cdot s) = \{s\}$ et $S \subseteq S \cdot s$. Nous déduirons encore du théorème 1.1 des propriétés auxquelles nous nous référerons constamment par la suite; désormais, à moins d'indications contraires, K *désigne un complexe W-minimal à droite.*

PROPRIÉTÉ 1.1. - *Pour tout élément k de K, la relation $kx \in K$, $(x \in D)$, entraîne $kx = k$.*

En effet, $kx \in K$ équivaut à $x \in K \cdot k$.

PROPRIÉTÉ 1.2. - *Quel que soit $k \in K$, il existe $x \in D$ tel que $kx = k$.*

K étant disjoint de W, il existe, pour tout $k \in K$, $x \in D$ tel que $kx \in K$, d'où, d'après la propriété 1.1, $kx = k$.

PROPRIÉTÉ 1.3. - *Si $k \in K$ et $m \in D$ sont tels que $km \notin W$, il existe $x \in D$ tel que $kmx = k$.*

Si $km \notin W$, il existe $x \in D$ tel que $(km)x \in K$. D'où $(km)x = k(mx) = k$ d'après la propriété 1.1.

PROPRIÉTÉ 1.4. - *Si k_1 et k_2 sont deux éléments de K, la relation $k_1x_1 = k_2x_2 \notin W$ (x_1, $x_2 \in D$) entraîne $k_1 = k_2$.*

Puisque $k_1x_1 \notin W$, et d'après la propriété 1.3, il existe $x \in D$ tel que $k_1x_1x = k_1$, d'où $k_2x_2x = k_1$ et d'après la propriété 1.1, $k_1 = k_2$.

Etant donné un élément k *quelconque* d'un demi-groupe D, l'ensemble $S_k = k \cdot \cdot k$ des éléments x de D vérifiant $kx = k$ est un *sous-demi-groupe* de D, éventuellement vide et même un sous-demi-groupe *unitaire à gauche.*

Soit en effet $sx = s_1$ avec s, $s_1 \in S_k$ c'est-à-dire $ks = k = ks_1$. On a $k = ks_1 = k(sx) = (ks)x = kx$ donc $x \in S_k$.

Si k appartient à au moins un complexe W-minimal (pour un idéal à droite fortement large à droite W), on peut affirmer, d'après la propriété 1.2, que S_k n'est pas vide. Notons que S_k est, par définition, indépendant du complexe W-minimal contenant k.

THÉORÈME 1.2. - 1°) *Si $k \in K$, complexe W-minimal à droite de D, le résidu à droite Ws_k de S_k est $W \cdot \cdot k$: $Ws_k = W \cdot \cdot k$ (donc, si $W = \emptyset$, S_k est net à droite).*

2°) *Pour que K, complexe W-minimal à droite, soit un sous-demi-groupe, il faut et il suffit que:* $\forall k \in K$ on ait $K \subseteq S_k$.

3°) *Pour que K, complexe W-minimal à droite, soit unitaire à gauche, il faut et il suffit que:* $\forall k \in K$ on ait $S_k \subseteq K$.

1°) Si $a \notin W \cdot \cdot k$, $ka \notin W$, donc il existe $x \in D$ tel que $kax \in K$ d'où $kax = k$ et $ax \in S_k$. c'est-à-dire $a \notin Ws_k$.

Si $a \in W \cdot \cdot k$, $ka \in W$ et pour tout $x \in D$, $kax \in W$; comme $K \cap W = \emptyset$, $ax \notin S_k$ c'est-à-dire $a \in Ws_k$.

2°) Si K est un sous-demi-groupe de D, on a, d'après le corollaire 1.3, $\forall k \in K$, $kK = \{k\}$, d'où $K \subseteq S_k$.

Supposons $K \subseteq S_k$, $\forall k \in K$; soient k, k_1 deux éléments quelconques de K; $k_1 \in K \subseteq S_k$ donc $kk_1 = k \in K$.

3°) Il est évident que si K est unitaire à gauche, on a $S_k \subseteq K$, $\forall k \in K$. Réciproquement, supposons $S_k \subseteq K$, $\forall k \in K$, et soit $kx = k'$ avec k, $k' \in K$. K étant W-minimal à droite, on a $k' = k$, donc $x \in S_k \subseteq K$ et K est unitaire à gauche.

COROLLAIRE 1.4. - *Pour qu'un complexe W-minimal à droite, K, soit un sous-demi-groupe unitaire à gauche de D, il faut et il suffit que :* $\forall k \in K$, *on ait* $S_k = K$ *c'est-à-dire* $k \cdot k = K$.

2. Étude de certaines correspondances entre complexes ayant même résidu à droite, et dégagés de ce résidu.

A. Nous considérons dans ce paragraphe *deux complexes K et K' de D, admettant même résidu à droite W, et dégagés de W.*

Quel que soit $a \in D - W$, il existe $x, x' \in D$ tels que $ax \in K$ et $ax' \in K'$.

Nous définissons entre ces deux complexes plusieurs correspondances de la manière suivante :

1°) Une application multiforme f (au sens de [12]), de $K_1 = K - (K \cap W)$ dans K' définie par : $f(k) = K' \cap kD = \{ k' ;\ k' \in K' ;\ \exists x \in D,\ kx = k' \}$.

On a bien $f(k) \neq \emptyset$ (puisque $k \notin W = W_{K'}$). De plus, $f(k) \subseteq K' \cap D^2$ entraîne $f(k) \cap W = \emptyset$ puisque K' est dégagé de W, et par suite, on a $f(K_1) \subseteq K' - (K' \cap W)$.

2°) L'application inverse (au sens de [12]), définie pour tout $k' \in f(K_1)$ par $f^{-1}(k') = \{ k ;\ k \in K ;\ k' \in f(k) \}$ c'est-à-dire ici $f^{-1}(k') = \{ k ;\ k \in K,\ \exists x \in D,\ kx = k' \}$.

3°) Une application multiforme φ de $K_1' = K' - (K' \cap W)$ dans K, définie par : $\varphi(k') = K \cap k'D = \{ k ;\ k \in K ;\ \exists x' \in D,\ k'x' = k \}$.

Comme ci-dessus, on a, de manière analogue, $\varphi(k') \neq \emptyset$ et $\varphi(K_1') \subseteq K - (K \cap W)$.

4°) L'application inverse de φ, définie pour tout $k \in \varphi(K_1')$ par : $\varphi^{-1}(k) = \{ k' ;\ k' \in K' ;\ \exists x' \in D,\ k'x' = k \}$.

B. Nous supposons maintenant que l'un des complexes K ou K' est W-minimal (à droite). Nous ferons les raisonnements en supposant que K' *est W-minimal à droite.*

Il en résulte que $K' \cap W = \emptyset$ et que φ est définie *sur* K' ($K_1' = K'$). On a $\varphi(K') \subseteq K - (K \cap W)$ donc $f\varphi(k') \neq \emptyset$. Or d'après les définitions, on a $k_1' \in f\varphi(k')$ si et seulement s'il existe dans D un couple d'éléments x, x' tels que $k'x'x = k_1'$, ce qui exige $k_1' = k'$ (d'après la propriété 1.1). Donc :

PROPRIÉTÉ 2.1. - *Pour tout élément k' de K', complexe W-minimal à droite de D, on a*

$$f\varphi(k') = \{ k' \}. \tag{1}$$

De cette propriété résulte immédiatement $f\varphi(K') = K'$ et, puisque $\varphi(K') \subseteq K - (K \cap W)$, $f[K - (K \cap W)] = K'$, donc f^{-1} est définie *sur* K'. La propriété connue $f^{-1}f(A) \supseteq A$ donne alors, en tenant compte de (1), $f^{-1}(k') = f^{-1}f\varphi(k') \supseteq \varphi(k')$. D'où le

COROLLAIRE 2.1. - *L'application f^{-1} est définie* sur *K' et pour tout élément k' de K',*

(2) $$\varphi(k') \subseteq f^{-1}(k').$$

PROPRIÉTÉ 2.2. - *Pour toute couple d'éléments k_1', k_2' de K', $k_1' \neq k_2'$ entraîne $\varphi(k_1') \cap \varphi(k_2') = \emptyset$.*

En effet, $k \in \varphi(k_1') \cap \varphi(k_2')$, $k \in K$, entraîne $k \notin W$ et des égalités de la forme $k = k_1'x_1' = k_2'x_2'$ d'où, d'après la propriété 1.4, $k_1' = k_2'$.

COROLLAIRE 2.2. - *L'application φ est semi-uniforme et son application inverse φ^{-1} est uniforme.*

Dire que φ est semi-uniforme signifie que $\varphi(x_1') \, x \, \varphi(k_2')$ entraîne $\varphi(k_1') = \varphi(k_2')$, ce qui résulte ici de l'égalité $k_1' = k_2'$. Cette égalité entraîne de plus que φ^{-1} est uniforme puisque $k_1' \in \varphi^{-1}(k)$, $k_2' \in \varphi^{-1}(k)$ entraînent $k \in \varphi(k_1') \cap \varphi(k_2')$ et par conséquent $k_1' = k_2'$.

C. Nous énoncerons par symétrie les conclusions correspondant au cas où K est W-minimal à droite.

THÉORÈME 2.1. - *K étant un complexe W-minimal à droite, l'application f est définie sur K. Pour tout élément k de K, on a $\varphi f(k) = |k|$; l'application φ^{-1} est définie sur K ; pour tout élément k de K, on a (2') $f(k) \subseteq \varphi^{-1}(k)$; pour tout couple d'éléments k_1, k_2 de K, $k_1 \neq k_2$ entraîne $f(k_1) \cap f(k_2) = \emptyset$; l'application f est semi-uniforme et son application inverse est uniforme.*

D. Nous supposons enfin que *K et K' sont tous deux W-minimaux à droite.*

D'après *B* et *C*, f et φ^{-1} sont définies sur K, f^{-1} et φ sont définies sur K' ; $f(K) = K'$ et $\varphi(K') = K$.

De plus, φ^{-1} et f^{-1} sont *uniformes* ; les seconds membres des relations

(2) $$\varphi(k') \subseteq f^{-1}(k') \qquad (2') \qquad f(k) \subseteq \varphi^{-1}(k)$$

ne contiennent qu'un élément, ce qui entraîne les égalités

(3) $$\varphi(k') = f^{-1}(k') \qquad (3') \qquad f(k) = \varphi^{-1}(k).$$

Par conséquent, f et φ sont deux fonctions uniformes inverses l'une de l'autre. Ainsi :

THÉORÈME 2.2. - *Entre deux complexes K et K' W-minimaux à droite, il existe une correspondance bijective, définie de la façon suivante : un élément k de K et un élément k' de K' se correspondent dans cette bijection, $k' = f(k)$,* si : $\exists x \in D$ tel que $k' = kx$ *ou, ce qui revient au même* $\exists x' \in D$ tel que $k = k'x'$.

CAS PARTICULIERS. - Pour $K' = K$, l'application f est l'identité d'après la propriété 1.1 ; si $W = \emptyset$, nous pouvons énoncer : deux complexes nets d'un côté minimaux se correspondent bijectivement.

Dans les démonstrations ultérieures, nous utiliserons souvent le fait que, si K et K' sont des complexes W-minimaux du demi-groupe D, les relations $k' = kx$ et $k = k'x'$ où $k \in K$, $k' \in K'$ $(x, x' \in D)$ sont équivalentes.

THÉORÈME 2.3. - *Si deux complexes W-minimaux à droite K et K' sont des sous-demi-groupes, la bijection f est un isomorphisme.*

On sait (corollaire 1.3) que les éléments d'un complexe W-minimal à droite, lorsque ce complexe est en même temps un sous-demi-groupe, sont *permis à droite* dans ce sous-demi-groupe.

Si k_1, $k_2 \in K$ ont pour images respectives, dans K', k_1' et k_2', on a : $k_1k_2 = k_1$; $k_1'k_2' = k_1'$. La propriété en résulte.

REMARQUE. - Dans un homogroupe, [29], [30], le théorème 2.2 signifie qu'il n'existe pas de complexes nets (d'un côté) minimaux contenant plus d'un élément. On le voit aussi en notant que, dans un homogroupe, tout complexe net (d'un côté) coupe le *nodule*, idéal bilatère de D et ensemble des éléments nets : tout complexe net (d'un côté) contient donc un élément net, qui est un complexe net minimal de l'homogroupe.

THÉORÈME 2.4. - *Dans un demi-groupe contenant des complexes W-minimaux à droite, tout complexe admettant W comme résidu à droite, et dégagé de celui-ci, contient au moins un complexe W-minimal à droite.*

Soit K' un complexe admettant W pour résidu à droite, et dégagé de W ; K un complexe W-minimal à droite arbitrairement choisi.

Dans l'application f de K dans K', les ensembles $f(k)$ sont disjoints (théorème 2.1). Nous choisissons dans chaque image $f(k)$ un représentant k_1' : $k_1' \in f(k)$ c'est-à-dire $k_1' = kx_1$ pour un $x_1 \in D$.

Nous définissons ainsi une application bijective f_1 de K sur un sous-ensemble K_1' de K'. Montrons que K_1' est W-minimal à droite. $K_1' \subseteq K'$ entraîne $W_{K'} = W \subseteq W_{K_1'}$. Montrons que $D - W \subseteq D - W_{K_1'}$. Si $a \in D - W$, il existe $x \in D$ tel que $ax = k \in K$ d'où $axx_1 = kx_1 = k_1' \in K_1'$; c'est-à-dire $a \notin W_{K_1'}$. Puisque K' est dégagé de W, K_1' l'est aussi. Montrons qu'il est minimal. Soit $k_1'x = k_2'$ avec $x \notin D$, k_1', $k_2' \in K_1'$ d'où $k_1' = f(k_1)$, $k_2' = f(k_2)$ pour k_1, $k_2 \in K$. Il existe x_1, $x_2 \in D$ tels que $k_1' = k_1x_1$ et $k_2' = k_2x_2$, d'où $k_1x_1x = k_2' = k_2x_2$ avec $k_2' \notin W$ puisque K' est dégagé de W. K étant W-minimal à droite, on a $k_1 = k_2$ d'après la propriété 1.4. Finalement, $f_1(k_1) = f_1(k_2)$ et $k_1' = k_2'$; la minimalité de K_1' en résulte, d'après le théorème 1.1.

L'hypothèse « K' dégagé de son résidu à droite W » ne peut être supprimée.

Si on prend $D = |\, a, b, c, d \,|$ avec la table de multiplication suivante (cf. n° 47 de [26]) et $W = |\, a, b \,|$, $K = |\, c, d \,|$ est le seul complexe W-minimal à droite. Le résidu à droite de $K' = |\, b \,|$ est W ; mais K', non dégagé de W, ne contient pas K.

	a	b	c	d
a	a	a	a	a
b	a	a	a	a
c	a	b	c	c
d	a	b	d	d

Dans le cas $W = \emptyset$, la propriété précédente devient : *dans un demi-groupe admettant des complexes net d'un côté minimaux, tout complexe net de ce côté contient un complexe net du même côté minimal.*

EXEMPLES. – 1°) Les demi-groupes complètement simples on été étudiés par de nombreux auteurs : REES [19], CLIFFORD [3], CROISOT [7], STEINFELD [24]. On sait qu'un demi-groupe complètement simple C, *sans zéro*, peut être représenté de la façon suivante : G étant un groupe, J et K deux ensembles d'indices et $(j, k) \to p_{k,j}$ une application de $J \times K$ dans G, les éléments de C sont les triplets $(a\,;\, j,\, k)$ avec $a \in G$, $j \in J$ et $k \in K$; la loi de composition est donnée par : $(a\,;\, j,\, k)(b\,;\, l,\, m) = (ap_{kl}b\,;\, j,\, m)$. Rappelons que C est réunion de groupes isomorphes disjoints [19].

On vérifie aisément que les complexes nets à droite minimaux, par exemple, sont les ensembles $|\, (a(j)\,;\, j,\, k(j)) \,|$, où j décrit J. La puissance commune de ces ensembles est celle de J. La réunion de tous ces complexes est égale au demi-groupe tout entier. On caractérise de même les complexes nets à gauche minimaux, dont la puissance est celle de K et la réunion égale à C.

2°) Soit maintenant un demi-groupe complètement simple avec zéro ; on considère ici un groupe avec zéro : $G' = G + |\, 0 \,|$, J et K sont deux ensembles d'indices, $(j, k) \to p_{k,j}$ est une application de $J \times K$ dans G' telle que, pour tout $k \in K$ (ou tout $j \in J$), il existe $j \in J$ (ou $k \in K$) tel que $p_{k,j} \neq 0$. Les éléments de C sont les triplets $(a\,;\, j,\, k)$ avec $a \in G = G' - |\, 0 \,|$, $j \in J$, $k \in K$, et un élément zéro représenté par $(0\,;\, j,\, k)$, $\forall j \in J$ et $\forall k \in K$. La loi de composition est la même que dans le cas sans zéro.

L'idéal bilatère (0) est fortement large, à gauche et à droite (définition 1.2) ; car $xC = (0)$ par exemple, en posant $x = (a\,;\, j,\, k)$ et en prenant dans C un $y = (b\,;\, l,\, m)$ tel que $b \neq 0$, $p_{k,l} \neq 0$, entraîne $x = 0$.

Considérons un complexe $H = |\, (a(j)\,;\, j,\, k(j)) \,|$ où j décrit J et $a(j) \in G = G' - |\, 0 \,|$. On voit aisément qu'un tel complexe est (0)-minimal à droite.

Notons que les réunions des complexes (0)-minimaux à gauche et des complexes (0)-minimaux à droite sont égales entre elles et à $C^* = C - \{0\}$.

Nou voyons par cet exemple que la théorie des complexes W-minimaux donne des résultats non triviaux dans le cas « avec zéro » ; il n'en était pas de même de la seule théorie des complexes nets d'un côté minimaux [CR 1] : dans un demi-groupe avec zéro, $\{0\}$ est le seul complexe net à droite (ou à gauche) minimal.

3°) Les demi-groupes de Baer et Lévi [1], [27] sont des demi-groupes admettant la division à gauche, tels qu'aucun élément n'admette d'élément-unité à droite. Tout élément est net à gauche, donc est un complexe net à gauche minimal ; *il n'y a pas de complexes nets à droite minimaux, puisque la propriété* 1.1 *entraîne l'existence d'éléments-unité à droite pour les éléments de ces complexes.*

4°) Dans un demi-groupe libre, dont les éléments sont les mots formés à partir d'un ensemble fini ou non A, aucun élément n'admet d'élément-unité à droite ou à gauche. Un demi-groupe libre, en particulier un demi-groupe cyclique infini, ne contient donc, d'après la propriété 4.1, aucun complexe W-minimal, à droite ou à gauche, pour un idéal à droite ou à gauche fortement large donné W. En particulier, ils ne contiennent ni complexes nets à droite minimaux, ni complexes nets à gauche minimaux.

Les théorèmes de structure que nous donnons dans les paragraphes suivants permettent de construire d'autres exemples de demi-groupes admettant des complexes W-minimaux.

3. Étude de la réunion des complexes W-minimaux à droite d'un demi-groupe D. Structure des demi-groupes admettant des complexes W-minimaux d'un côté.

Soit $\mathfrak{K}$ l'ensemble des complexes W-minimaux à droite d'un demi-groupe D. Dans ce paragraphe, nou étudions la réunion R de ces complexes : $R = \bigcup_{K \in \mathfrak{K}} K$. Nous déduirons de cette étude des renseignements concernant la structure des demi-groupes qui possédent des complexes W-minimaux d'un côté, pour un idéal à droite fortement large donné W.

K étant un complexe W-minimal à droite, et m un élément quelconque de D, désignons par E l'ensemble des éléments e de K tels que $em \in W$: $E = \{e : e \in K, em \in W\}$, et posons $F = K - E = \{f ; f \in K, fm \notin W\}$.

Lemme. - *Le complexe* $L = E \cup Fm$ *est* W*-minimal à droite.*

Puisque K est disjoint de W, il en est de même de E ; d'après la définition de F, on a $Fm \cap W = \emptyset$, *L est donc disjoint de W.* Montrons que $W_L = W$.

Si $a \notin W$, il existe un élément x de D tel que $ax = k \in K$. Si $k \in E$, $ax \in L$; si $k \in F$, $axm \in Fm \subseteq L$; dans les deux cas, $a \notin W_L$.

Si $a \notin W_L$, il existe $x_1 \in D$ tel que $ax_1 \in L$ d'où $ax_1 \notin W$; W étant un idéal à droite, nous avons $a \notin W$, *l'égalité* $W_L = W$ *est établie.*

Montrons enfin que L *est* W*-minimal*, en utilisant le lemme 1.4. Supposons que l'on ait $lx \in L$ pour un $l \in L$ et un $x \in D$.

a) Si $l = fm$, avec $f \in F$, on ne peut avoir $lx = fmx = e \in E$ car, d'après la propriété 1.4 (applicable puisque $e \notin W$), il en résulterait $f = e$, égalité impossible puisque E et F sont par définition disjoints. Donc $lx = fmx = f'm$ avec $f' \in F$, d'où $f = f'$ (toujours d'après la propriété 1.4) et finalement $lx = fmx = fm = l$.

b) Si $l = e \in E$, on ne peut avoir $lx = ex = fm$ car $fm \notin W$ entraînerait encore $e = f$. Donc $lx = ex = e' \in E$. Le lemme 1.4 appliqué au complexe K, W-minimal, donne alors $e' = e$ et par conséquent encore $lx = l$.

Les relations $lx \in L$, $l \in L$, entraînant $lx = l$, nous avons, pour tout $l \in L$, $l(L \cdot' l) = \{ l \}$, L étant disjoint et à fortiori dégagé de son résidu W, est un complexe W-minimal d'après le lemme 1.4.

Pour un élément k quelconque de K, désignons par $D_k = D - (W \cdot' k)$ l'ensemble des éléments m de D tels que $km \notin W$.

THÉORÈME 3.1. - 1°) *Si* $m \in D_k$, km *appartient à au moins un complexe* W*-minimal á droite.*

2°) *Si* $m \in \bigcap_{k \in K} D_k = T$, Km *est un complexe* W*-minimal à droite.*

1°) Si $m \in D_k$, c'est-à-dire $km \notin W$, on a, avec les notations du lemme, $km \in Fm \subseteq L$; or L, d'après le lemme, est un complexe W-minimal à droite.

2°) Si $m \in T$, on a, pour tout $k \in K$, $km \notin W$, d'où, encore avec les notations du lemme, $E = \emptyset$, $F = K$, et enfin $Km = L$.

REMARQUE. - T peut être vide ; par exemple, si $D = \{ z, a, b, c \}$ est défini par la table suivant (n° 91 de [26]) et si l'on prend $W = (z)$ et $K = \{ a, b \}$, on a $T = \emptyset$.

	z	a	b	c
z	z	z	z	z
a	z	a	z	z
b	z	z	b	c
c	z	z	b	c

On voit aussi sur cet exemple qu'un complexe W-minimal n'est pas nécessairement le produit d'un autre par un élément de D.

REMARQUE. - Si $W = \emptyset$, $T = D$; *si* K *est un complexe net à droite minimal,* Km *en est un, quel que soit* $m \in D$; R *est donc un idéal à droite de* D. K *étant un complexe* W*-minimal à droite de* D, *posons* $V_k = \bigcup_{k \in K} k(W \cdot^{\cdot} k)$.

THÉORÈME 3.2. - *Si* R *est la réunion des complexes* W*-minimaux à droite de* D,

$$KD = R + V_K,$$

Si $k \in K$, $m \in D$ et si $m \notin W \cdot^{\cdot} k$, il résulte du théorème 3.1 que $km \in R$; donc $KD \subseteq R \cup V_K$.

Si k' est un élément de R, soit K' un complexe W-minimal le contenant; d'après le théorème 2.2, il existe $x \in D$ tel que $k' = kx$ pour un $k \in K$, d'où $k' \in KD$. Par définition, $V_K \subseteq KD$ et finalement, on a l'inclusion $R \cup V_K \subseteq KD$, d'où $KD = R \cup V_K = R + V_K$ puisque $k(W \cdot^{\cdot} k) \subseteq W$ entraîne $V_K \subseteq W$ et que $R \cap W = \emptyset$.

CAS PARTICULIER. - Si $W = \emptyset$, quel que soit $k \in K$, $V_K = \emptyset$ et $R = KD$.

THÉORÈME 3.3. - *Si* K *et* K' *sont deux complexes* W*-minimaux à droite, on a*

$$KD = K'D \qquad V_K = V_{K'}.$$

Soit $kd \in KD$; d'après le théorème 2.2, il existe $k' \in K'$ et $x' \in D$ tels que $k = k'x'$ d'où $kd = k'x'd \in K'D$. On montre de même l'inclusion contraire $K'D \subseteq KD$.

De $KD = K'D = R + V_K = R + V_{K'}$ et $R \cap V_K = R \cap V_{K'} = \emptyset$ on déduit immédiatement $V_K = V_{K'}$.

DÉFINITION 3.1. - W *étant un idéal à gauche, à droite ou bilatère du demi-groupe* D, *nous dirons qu'un idéal* I *de* D, *de même nature que* W, *non contenu dans* W, *est* W*-minimal, si* I *couvre* $I \cap W$, [14].

THÉORÈME 3.4. - k *étant un élément quelconque de* $R = \bigcup_{K \in \mathfrak{K}} K$, *l'idéal à droite engendré dans* D *par* k *est égal à* kD *et* W*-minimal.*

L'idéal à droite engendré dans D par k est $kD \cup k$ ou encore, d'après la propriété 1.2, kD. Supposons qu'il existe un idéal à droite V tel que $kD \cap W \subset V \subset kD$. La première inclusion étant stricte, soit $k' \in V$, $k' \notin W$; l'idéal $J' = k'D \cup k'$ engendré par k' dans D vérifie $J' \subseteq V \subset kD$; nous avons donc nécessairement $k' \neq k$. Puisque $k' \in kD$, il existe $x \in D$ tel que $k' = kx$. Comme $k' \notin W$, $x \notin W \cdot^{\cdot} k$, c'est-à-dire $x \in D_k$ et il existe, d'après le théorème 3.1, un complexe W-minimal à droite K' contenant k'; les propriétés de la correspondance définie au théorème 2.2 entre K et K' entraînent que $k = k'x'$ pour un $x' \in D$, donc $k \in k'D \cup k' = J'$, d'où $kD \subseteq J'$, en contradiction avec

les inclusions $J' \subseteq V \subset kD$. D'après la définition 3.1, l'idéal kD ($k \in K$) est W-minimal.

REMARQUE. - $k \in kD$ et $k \notin W$ entraîne $kD \not\subseteq W$.

D'après le théorème précédent nous pouvons énoncer:

COROLLAIRE 3.1. - *Si un demi-groupe admet des complexes W-minimaux d'un côté, il admet des idéaux du même côté W-minimaux. En particulier, si un demi-groupe contient des complexes nets d'un côté minimaux, il contient des idéaux du même côté minimaux.*

Avant d'établir, moyennant une hypothèse supplémentaire, une réciproque de cette proposition, nous démontrons le:

LEMME 3.1. - a) *Si le résidu à droite, W_H, d'un complexe H est contenu dans un idéal à droite W, H coupe tout idéal à droite I de D non contenu dans W: $H \cap I \neq \emptyset$ ($I \not\subseteq W$).*

b) *Si H coupe tout idéal à droite de D non contenu dans un idéal à droite W, et si W est fortement large à droite, le résidu à droite de H est contenu dans W, $W_H \subseteq W$.*

Si le résidu W_H de H est contenu dans W, $W_H \subseteq W$, et si I est un idéal à droite de D non contenu dans W, $I \not\subseteq W$, il existe $i \in I$ tel que $i \notin W$, donc $i \notin W_H$. Il existe donc $x \in D$ tel que $ix \in H$, d'où $ix \in H \cap I$.

Supposons inversement que H coupe tout idéal à droite de D non contenu dans W, si $a \notin W$, $aD \not\subseteq W$ puisque W est fortement large à droite ($W = W \cdot D$), donc aD coupe H et $a \notin W_H$, donc $W_H \subseteq W$.

Si de plus H est dégagé de W, on a, dans la première partie du lemme 3.1, $ix \notin W$, donc $ix \in H \cap [I - (I \cap W)]$ et $H \cap [I - (I \cap W)] \neq \emptyset$.

Inversement, si la relation précédente est vraie pour tout idéal à droite I non contenu dans W, on a, a fortiori, $H \cap I \neq \emptyset$, d'où, d'après la seconde partie du lemme 3.1, $W_H \subseteq W$. Mais, d'après le lemme 1.1, H étant dégagé de l'idéal à droite W, l'inclusion $W_H \subseteq W$ entraîne l'égalité $W_H = W$. Finalement, nous pouvons énoncer:

COROLLAIRE 3.2. - *Une condition nécessaire et suffisante pour qu'un complexe H, dégagé d'un idéal à droite fortement large à droite W, ait W pour résidu à droite, est que, pour tout idéal à droite I non contenu dans W, on ait: $H \cap [I - (I \cap W)] \neq \emptyset$. Nous dirons alors que H coupe I en dehors de W.*

COROLLAIRE 3.3. - *Si le demi-groupe D contient des complexes W-minimaux à droite, tout idéal à droite de D non contenu dans W contient l'idéal à droite W-minimal engendré par un élément k d'un complexe W-minimal arbitraire K.*

Un idéal à droite I, non contenu dans W, coupe tout complexe W-minimal à droite K, en vertu du lemme 3.1. Si $k \in K \cap I$, kD est contenu dans I et est W-minimal (théorème 3.4).

Le théorème suivant précise la structure des idéaux à droite W-minimaux d'un demi-groupe contenant des complexes W-minimaux à droite.

THÉORÈME 3.5. - *Si un demi-groupe contient des complexes W-minimaux à droite, tous les idéaux à droite W-minimaux de D sont de la forme $I_m = kD \cup W_1$, k étant un élément quelconque d'un complexe W-minimal à droite arbitraire et W un idéal à droite contenu dans W ($\emptyset \subseteq W_1 \subseteq W$). Si Σ est la réunion de ces idéaux, on a*

$$\Sigma = R + W.$$

Soit I_m un idéal à droite W-minimal de D; d'après le corollaire 3.3, I_m contient un idéal à droite kD, pour un $k \in K$, K complexe W-minimal à droite quelconque. On a : $I_m \cap W \subseteq kD \cup (I_m \cap W) \subseteq I_m$. De la W-minimalité de I_m résulte ou bien $I_m \cap W = kD \cup (I_m \cap W)$, donc $kD \subseteq W$, en contradiction avec $k \notin W$ (d'après le théorème 3.4), ou bien $I_m = kD \cup (I_m \cap W)$, réunion de kD et d'un idéal à droite contenu dans W.

Réciproquement, si $I = kD \cup W_1$, avec les hypothèses du théorème, montrons que I est W-minimal. C'est un idéal à droite non contenu dans W; puisque $kD \subseteq\!|\!\equiv W$. On a : $I \cap W = W_1 \cup (kD \cap W_1)$. Supposons qu'il existe un idéal à droite V compris entre I et $I \cap W$: $W_1 \cup (kD \cap W) \subseteq V \subseteq kD \cup W_1$. En prenant les intersections avec kD, on obtient: $kD \cap W \subseteq (W_1 \cap kD) \cup (kD \cap W) \subseteq$ $\subseteq V \cap kD \subseteq kD$. De la W-minimalité de kD, on déduit ou bien $V \cap kD =$ $= kD \cap W$ ou bien $V \cap kD = kD$. La première égalité entraîne $V = W_1 \cup$ $\cup (kD \cap W) = I \cap W$: il suffit, pour le prouver, de démontrer l'inclusion $V \subseteq W_1 \cup (kD \cap W)$; or nous avons $V \subseteq kD \cup W_1$, donc $V = V \cap (kD \cup W_1) =$ $= (V \cap kD) \cup (V \cap W_1) \subseteq (kD \cap V) \cup W_1 = (kD \cap W) \cup W_1$.

La seconde égalité entraîne $V = I$, car V contient alors kD et W_1, donc I. I couvre donc $I \cap W$, c'est-à-dire est W-minimal.

L'égalité $\Sigma = R + W$ est une conséquence immédiate de la première partie du théorème et de la propriété: $\forall k \in R$, $k \in kD$.

Etudions maintenant les demi-groupes qui contiennent des idéaux à droite W-minimaux, pour un idéal à droite W fortement large à droite.

Soit $\mathfrak{I}$ l'ensemble de ces idéaux; par définition, $I \in \mathfrak{I}$ entraîne $I \subseteq\!|\!\equiv W$; considérons la partition de $\mathfrak{I}$ définie par l'équivalence $\mathfrak{S}$ suivante:

$$I \equiv J\ (\mathfrak{S}) \leftrightarrow I - (I \cap W) = J - (J \cap W).$$

Si $W = \emptyset$, $\mathfrak{S}$ est l'égalité dans $\mathfrak{I}$.

LEMME 3.2. - *Si I et J sont deux idéaux à droite W-minimaux appartenant à des classes différentes modulo $\mathfrak{S}$, I et J ne se coupent pas en dehors de W :*

$$[I - (I \cap W)] \cap [J - (J \cap W)] = \emptyset.$$

On a en effet : $I \cap W \subseteq (I \cap W) \cup (I \cap J) \subseteq I$. De la W-minimalité de I résulte alors soit $I \cap W = (I \cap W) \cup (I \cap J)$ c'est-à-dire $I \cap J \subseteq W$; soit $(I \cap W) \cup (I \cap J) = I$ d'où $I - (I \cap W) \subseteq J - (J \cap W)$. Le même raisonnement fait à partir des inclusions $J \cap W \subseteq (J \cap W) \cup (I \cap J) \subseteq J$ montre qu'on a, soit $I \cap J \subseteq W$, soit $J - (J \cap W) \subseteq I - (I \cap W)$. Finalement, ou bien $I \cap J \subseteq W$, ou bien $I - (I \cap W) = J - (J \cap W)$. La propriété du lemme en résulte.

Ce lemme, et le lemme 3.1, permettent de démontrer la proposition suivante :

THÉORÈME 3.6. - *Soit D un demi-groupe et W un idéal à droite fortement large à droite de D ; s'il existe des idéaux à droite W-minimaux et si tout idéal à droite de D, non contenu dans W, contient (au moins) un idéal à droite W-minimal, D possède des complexes W-minimaux à droite.*

Choisissons dans chaque classe α modulo $\mathfrak{S}$ un idéal I_α et dans cet idéal un élément et un seul i_α n'appartenant pas à W : $i_\alpha \notin W$. Considérons le complexe K ensemble des i_α. Par construction, K est disjoint, donc dégagé, de W, et il coupe tout idéal à droite de D non contenu dans W en dehors de W ; d'après le corollaire 3.2, K a donc W pour résidu à droite.

Il est W-minimal, puisque $K - \{i_\alpha\}$, pour une certaine classe α, ne coupe en dehors de W, ni I_α, ni les idéaux de la classe α, et n'admet donc pas, d'après le corollaire 3.2, W pour résidu à droite.

REMARQUE. - Cette démonstration fournit une autre démonstration de l'équipotence des complexes W-minimaux à droite de D. En effet, il résulte de leur formation à partir des classes d'idéaux à droite W-minimaux que ces complexes ont même puissance que l'ensemble $\mathfrak{I}/\mathfrak{S}$ des classes modulo $\mathfrak{S}$.

Dans le cas $W = \emptyset$, $\mathfrak{S}$ étant l'égalité, la puissance d'un complexe net à droite minimal est celle de l'ensemble des idéaux à droite minimaux.

REMARQUE. - Dans l'énoncé du théorème 3.6, l'hypothèse « tout idéal à droite non contenu dans W contient un idéal à droite W-minimal » n'est pas superflue. En effet, nous allons donner un exemple de demi-groupe admettant des idéaux à droite W-minimaux et tel que cette hypothèse ne soit pas vérifiée ; comme cette hypothèse, en vertu du corollaire 3.3, est nécessaire pour qu'il existe des complexes W-minimaux à droite, ce demi-groupe n'en contient pas et le théorème 3.6 cesse d'être vrai.

On prend par exemple $D = D_1 \cup D_2 \cup \{0\}$ où D_1 est un demi-groupe admettant des idéaux à droite minimaux, D_2 un demi-groupe n'en admettant

pas (voir les exemples du paragraphe 2), la loi de composition est celle de D_i dans D_i ($i = 1, 2$) et, pour tout $d_1 \in D_1$ et tout $d_2 \in D_2$, on pose :

$$d_1 \cdot 0 = 0 \cdot d_1 = d_2 \cdot 0 = 0 \cdot d_2 = d_1 \cdot d_2 = d_2 \cdot d_1 = 0.$$

Prenons $W = (0)$; si I_1 est un idéal à droite minimal de D_1, $I_1 + \{0\}$ est un idéal à droite (0)-minimal de D ; si I_2 est un idéal à droite de D_2, $I_2 + \{0\}$ est un idéal à droite de D, non contenu dans W et ne contenant pas d'idéaux à droite (0)-minimaux.

En rassemblant les résultats obtenus (théorème 3.4, corollaire 3.3 et théorème 3.6), nous pouvons énoncer :

THÉORÈME 3.7. – *Pour qu'un demi-groupe D possède des complexes W-minimaux à droite, il faut et il suffit qu'il satisfasse simultanément aux trois conditions suivantes :* 1°) *W est un idéal à droite fortement large à droite de D.* 2°) *D contient des idéaux à droite W-minimaux.* 3°) *Tout idéal à droite de D, non contenu dans W, contient au moins un idéal à droite W-minimal.*

CAS PARTICULIER :

THÉORÈME 3.8. – *Si D vérifie la condition de chaîne descendante pour les idéaux à droite, D admet des complexes W-minimaux à droite, pour tout idéal à droite W fortement large à droite. En particulier, tout demi-groupe fini admet des complexes W-minimaux d'un côté quelconque.*

La condition de chaîne descendante entraîne l'existence d'idéaux à droite W-minimaux. D'autre part, tout idéal à droite I, non contenu dans W, contient un idéal à droite W-minimal ; en effet, si I ne couvre pas $I \cap W$, il existe I_1, idéal à droite de D, tel que $I \supset I_1 \supset I \cap W$. Si I_1 ne couvre pas $I_1 \cap W$, il existe un idéal à droite I_2 tel que $I \supset I_1 \supset I_2 \supset I_1 \cup W$. On forme ainsi, par itération, une chaîne descendante d'idéaux à droite nécessairement finie ; le dernier idéal de la chaîne est W-minimal et est contenu dans I.

Nous avons déjà signalé, au paragraphe 1, l'intérêt du cas où W est un idéal (à droite) premier. Cet intérêt est mis en évidence par le théorème suivant, dont la démonstration est immédiate.

THÉORÈME 3.9. – *Si W est un idéal à droite premier de D, W est fortement large (à droite) ; $D - W$ est un sous demi-groupe ; il y a identité entre l'ensemble des complexes W-minimaux à droite de D et celui des complexes nets à droite minimaux du demi-groupe $D - W$.*

L'application de la théorie générale au cas des complexes nets à droite minimaux d'un demi-groupe ($W = \emptyset$) doit tenir compte de la propriété suivante (CLIFFORD [3]) : dans un demi-groupe admettant des idéaux à droite minimaux, c'est-à-dire avec notre terminologie, $\emptyset$-minimaux, tout idéal à

droite contient un idéal à droite minimal et la somme des idéaux à droite minimaux est l'idéal bilatère minimum (ou noyau) du demi-groupe [3], [22].

En appliquant alors la formule $\Sigma = R + W$ pour $W = \emptyset$, on obtient le :

THÉORÈME 3.10. - *Pour qu'un demi-groupe D possède des complexes nets d'un côté minimaux, il faut et il suffit qu'il possède des idéaux du même côté minimaux. La réunion de ces complexes est alors égale à celle des idéaux correspondants, c'est-à-dire à l'idéal bilatère minimum de D.*

COROLLAIRE 3.4. - *Dans un demi-groupe admettant à la fois des complexes nets à droite minimaux, dont la réunion est R, et des complexes nets à gauche minimaux, dont la réunion est R', on a : $R = R'$ et l'ensemble commun N ($N = R = R'$) est l'idéal bilatère minimum du demi-groupe.*

Nous retrouverons ces résultats comme cas particuliers dans une théorie plus générale, avec des propriétés supplémentaires pour R, R' et W. Cette théorie concerne le cas où W est un idéal bilatère, d'abord quelconque, puis réflectif [33].

Supposons d'abord que W soit un *idéal bilatère* de D, *fortement large à à droite.*

THÉORÈME 3.11. - *Soit D un demi-groupe admettant des idéaux à droite W-minimaux, pour un idéal bilatère W. Si I est un idéal à droite W-minimal, et c un élément quelconque de D, cI est contenu dans W ou est un idéal à droite W-minimal.*

cI est un idéal à droite ; si $cI \subseteq\!\!\!|\!\!= W$, supposons qu'il existe un idéal à droite V tel que $cI \cap W \subseteq V \subseteq cI$. Soit I_1 l'ensemble des éléments i_1 de I tels que $ci_1 \in V$.

Pour tout $d \in D$, $ci_1 d \in V$ donc $i_1 d \in I_1$: I_1 est un idéal à droite contenu dans I. Si $i \in I \cap W$, $ci \in W$ donc $ci \in cI \cap W \subseteq V$, c'est-à-dire que $i \in I_1$, d'où $I \cap W \subseteq I_1$. D'après la minimalité de I, ou bien $I \cap W = I_1$, ou bien $I_1 = I$; dans le premier cas, on a $I_1 \subseteq W$, $cI_1 = V \subseteq W$ d'où $V \subseteq cI \cap W$ et finalement $V = cI \cap W$; dans le second cas $V = cI_1 = cI$; cI couvre $cI \cap W$. CQFD.

COROLLAIRE 3.5. - *Soit D un demi-groupe admettant des complexes W-minimaux à droite, pour un idéal bilatère W. Si k est un élément d'un complexe W-minimal à droite K et c un élément de D tel que $c \notin W : k$, on a $ck \in R = \bigcup_{K \in \mathcal{K}} K$, en désignant par $\mathcal{K}$ l'ensemble des complexes W-minimaux à droite de D.*

L'idéal kD est W-minimal à droite (théorème 3.4) donc le complexe ckD est, d'après le théorème 3.11, un idéal à droite W-minimal (car $ckD \subseteq W$ entraînerait $ck \in W$), donc $ckD = k_1 D \cup W_1$ d'après le théorème 3.5 (W_1 idéal à droite de D contenu dans W, k_1 élément de R). Il existe $x \in D$ tel que

$kx = k$, donc $ck \in k_1 D \cup W_1$ et, puisque nous avons par hypothèse $ck \notin W$, d'où $ck \notin W_1$, il existe $y \in D$ tel que $ck = k_1 y \notin W$ avec $k_1 y \in R$ d'après le théorème 3.1.

Remarque. – La condition « W bilatère » n'est pas superflue dans l'énoncé précédent, considéré comme condition suffisante pour que $k \in R$, $c \in D$ entraîne $ck \in R \cup W$. On le voit par exemple en considérant le demi-groupe $D = \{z, a, b, c, d, e, f, g\}$, carré d'un demi-groupe n° 12 de [26].

	z	a	b	c	d	e	f	g	h
z	z	z	z	z	z	z	z	z	z
a	a	a	a	a	a	a	a	a	a
b	b	b	b	b	b	b	b	b	b
c	c	c	c	c	c	c	c	c	c
d	z	z	z	z	d	z	d	z	d
e	z	z	z	z	z	e	e	e	z
f	z	z	z	z	d	e	f	e	d
g	b	b	b	b	b	g	g	g	b
h	c	c	c	c	h	c	h	c	h

Si on prend $W = (z)$, on a $K = R = \{a, b, c, d, e\}$ et $g \cdot e = g$ avec $g \notin W$, $e \in R$ et $g \notin R$.

Mais cette condition n'est pas non plus nécessaire, comme il apparaît sur l'exemple suivant :

$$D = \{z, a, b, c\}, \qquad W = (z), \qquad K = R = \{a, b, c\}.$$

Pour tout $d \in D$ et tout $k \in K$, dk appartient à R ou à W.

	z	a	b	c
z	z	z	z	z
a	z	a	z	z
b	z	z	b	z
c	c	c	c	c

Corollaire 3.6. – *Dans un demi-groupe admettant des complexes W-minimaux à droite, pour un idéal bilatère W, la réunion $\Sigma = R = W$ des idéaux à droite W-minimaux est un idéal bilatère.*

On retrouve, pour $W = \emptyset$, une partie de l'énoncé du théorème 3.10.

La notion d'*idéal réflectif*, due à G. Thierrin [33], joue dans toute la la suite de ce travail un rôle important.

Un complexe ou un idéal H est réflectif si la relation $ab \in H$ entraîne $ba \in H$, ou encore $ab \notin H$ entraîne $ba \notin H$. Rappelons aussi qu'un idéal, mono ou bilatère, est dit *semi premier* si $x^2 \in I$ entraîne $x \in I$.

PROPRIÉTÉ 3.1. - *Tout idéal d'un côté et réflectif est idéal bilatère. Tout idéal bilatère semi-premier est réflectif. Tout idéal bilatère premier est réflectif.*

La première de ces propriétés est immédiate. Démontrons la seconde qui entraîne la troisième: si I est un idéal bilatère semi-premier et si $ab \in I$, $b(ab)a \in I$ ou $(ba)^2 \in I$, et finalement $ba \in I$.

On suppose, dans toute la suite de ce paragraphe, que W est un idéal à droite fortement large et réflectif. W est donc un idéal bilatère fortement large à gauche et à droite ($aD \subseteq W \Leftarrow\Rightarrow Da \subseteq W \Rightarrow a \in W$).

Nous étudions dans ce cas la structure de la réunion R des complexes W-minimaux à droite de D, supposés exister. Pour cela, nous considérons d'abord l'ensemble $\bar{Z}$ des éléments de R dont le carré appartient à W. Plus généralement, nous démontrons que :

PROPRIÉTÉ 3.2. - *Si W est un idéal réflectif de D, l'ensemble Y des éléments a de D tels que $a^2 \in W$ est un idéal bilatère.*

Soit $a \in Y$ et $x \in D$; si $(ax)^2 \notin W$ ou $axax \notin W$, $axa \notin W$, donc $a^2x \notin W$, en contradiction avec $a^2 \in W$; on a $ax \in Y$ et de même $xa \in Y$; Y est bien un idéal bilatère.

Posons $\bar{Z} = R \cap Y$, $R^* = R - \bar{Z}$.

PROPRIÉTÉ 3.3. - *Pour tout élément $k \in \bar{Z}$ ($k^2 \in W$) et tout élément $k' \in R$, $kk' \in W$.*

Si $kk' \notin W$, $k'k \notin W$ puisque W est réflectif; d'après la propriété 1.3 il existe $x \in D$ tel que $k'kx = k'$, d'où $kk'kx = kk' \notin W$. Donc $kk'k \notin W$ ou $k^2k' \notin W$, en contradiction avec $k^2 \in W$.

COROLLAIRE 3.7. - *Si $k, k' \in R$, la relation $kk' \notin W$ entraîne $k^2 \notin W$ et $k'^2 \notin W$.*

On peu représenter la structure de D par le schéma suivant analogue à une table de multiplication et exprimant des propriétés telles que $\bar{Z}W \subseteq W$, $W^2 \subseteq W$, etc.

		W	$\bar{Z}$	R^*
	W	W	W	W
R	$\bar{Z}$	W	W	W
	R^*	W	W	
		W		

PROPRIÉTÉ 3.4. – *Soient K_1 et K_2 deux complexes W-minimaux à droite de D ; si l'on pose $Z_1 = K_1 \cap \bar{Z}$, $Z_2 = K_2 \cap \bar{Z}$, on a :*

$$Z_2 = f(Z_1), \qquad Z_1 = f^{-1}(Z_2)$$

où f désigne l'application bijective de K_1 sur K_2 définie au théorème 2.2.

Soit $k_2 \in Z_2$; il existe, d'après les propriétés de l'application f (théorème 2.2), $x \in D$ et $k_1 \in K_1$ tels que $k_1 = k_2 x$; Y étant un idéal, $k_1 \in Z_1 = K_1 \cap \bar{Z} = K_1 \cap Y$ donc $Z_2 \subseteq f(Z_1)$.

Inversement, soit $k_1 \in Z_1$; il existe $x' \in D$ et $k_2 \in K_2$ tels que $k_2 = k_1 x'$, d'où $k_2 \in Z_2$, $f(Z_1) \subseteq Z_2$ et finalement $Z_2 = f(Z_1)$. Il en résulte $Z_1 = f^{-1}(Z_2)$.

COROLLAIRE 3.8. – *L'ensemble $\overline{W}$ défini par : $\overline{W} = \{ a ; a \in D, ax \in K \Rightarrow ax \in Z = K \cap \bar{Z} \}$ est indépendant du complexe W-minimal à droite K, et $\bar{Z} \subseteq \overline{W}$.*

Nous démontrons que les ensembles $\overline{W}_1$ et $\overline{W}_2$, définis comme $\overline{W}$, pour deux complexes W-minimaux à droite K_1 et K_2, sont égaux. Prouvons par exemple l'inclusion $\overline{W}_1 \subseteq \overline{W}_2$. Soit $a \in \overline{W}_1$; s'il existe $x \in D$ tel que $ax = k_2 \in K_2$, il existe aussi $x' \in D$ tel que $k_2 x' = axx' = k_1 \in K_1$; puisque $a \in \overline{W}_1$, $k_1 \in Z_1$ d'où $k_2 = f^{-1}(k_1) \in f^{-1}(Z_1) = Z_2$, c'est-à-dire $a \in \overline{W}_2$.

L'inclusion $\bar{Z} \subseteq \overline{W}$ se démontre facilement : si $k \in Z = R \cap Y$, et s'il existe $x \in D$ tel que $kx \in K$, on a $kx = k \in \bar{Z}$ d'où, par définition, $k \in \overline{W}$.

REMARQUE. – D'après ce qui précède, nous pouvons donner une deuxième définition de $\overline{W}$: $\overline{W} = \{ a ; a \in D, ax \in R \Rightarrow axax \in W \}$.

Nous allons remplacer le résidu W et la réunion R des complexes W-minimaux à droite par un résidu W^* et une réunion R^* de complexes W-minimaux à droite tels que l'ensemble Z^* correspondant soit vide.

THÉORÈME 3.12. – *K étant un complexe W-minimal à droite, le résidu à droite du complexe $K^* = K - Z$ (où $Z = K \cap \bar{Z} = K \cap Y$) est $W^* = W \cup \overline{W}$; W^* est disjoint de $R^* = \bigcup_{K \in \mathcal{K}} K^*$ et c'est un idéal réflectif de D.*

1°) $D - W^* \subseteq D - W_{K^*}$. Si $a \notin W^*$, $a \notin W$, donc il existe $x \in D$ tel que $ax \in K$; comme $a \notin \overline{W}$, $ax \notin Z$ donc $ax \in K^*$ et $a \notin W_{K^*}$.

2°) $D - W_{K^*} \subseteq D - W^*$. Si $a \notin W_{K^*}$, il existe $x \in D$ tel que $ax \in K$ et $ax \notin Z$, donc $a \notin W$ et $a \notin \overline{W}$, c'est-à-dire $a \notin W^*$.

3°) Si $k \in K^* \subseteq R^*$, $k \notin W^*$ puisque, d'une part, $k \notin W$ et que, d'autre part, il existe $x \in D$ tel que $kx = k \notin Z$, c'est-à-dire $k \notin \overline{W}$.

4°) W^*, résidu à droite de chacun des complexes K^*, est déjà un idéal à droite. Nous allons démontrer qu'il est réflectif.

Considérons deux éléments a, b de D vérifiant $ab \in W^*$; si $ab \in W$, $ba \in W$; supposons donc $ab \in W$.

D'après la seconde définition de $\overline{W}$, $abx \in R$ entraîne $(abx)^2 \in W$; pour démontrer que $ba \in \overline{W}$, nous devons démontrer que $bax \in R$. Supposons que $(bax)^2 \notin W$; si $(bax)^2 a \in W$, $x(bax)^2 a \in W$; W étant réflectif, $ax(bax)^2 \in W$ d'où $(bax)^4 \in W$.

Posons $bax = k \in R$; puisque $k^2 \notin W$, il existe $x \in D$ tel que $k^2 x = k$, d'où : $k^2 = k^2 x k^2 x$. Mais alors $k^2 x k^2 x \notin W$ entraîne $k^2 x k^2 \notin W$, $k^4 x \notin W$ en contradiction avec $k^4 \in W$.

On a donc $(bax)^2 \notin W$, d'où $a(bax)^2 \notin W$ et comme $bax \in R$, il résulte du théorème 3.1 et du corollaire 3.5 que $a(bax)^2 \in R$.

Or, $a(bax)^2 = ab(axbax)$; comme $ab \in W$, $ab(axbax)^2 = a \cdot bax \cdot bax \cdot a \cdot bax \cdot bax \in W$. On a : $bax \cdot bax \cdot a = k^2 a \notin W$; il existe donc $x \in D$ tel que $k^2 ax = k$. Si $k^2 \notin W$, $k^2 axk^2 ax = k^2 \notin W$, donc, en utilisant toujours le fait que W est réflectif, $k^2 ak^2 a \notin W$, $ak^2 ak^2 \notin W$ en contradiction avec la conclusion précédente. On a donc bien, finalement, $(bax)^2 \in W$ c'est-à-dire $ba \in \overline{W}$.

THÉORÈME 3.13. - *Tout complexe $K^* = K - Z$ $(K \neq \emptyset)$ est W^*-minimal à droite et, pour tout $k \in R$, $k^2 \notin W^*$.*

Nous avons déjà démontré que K^* avait pour résidu à droite W^* ; K^* est dégagé de W^* puisqu'il en est disjoint. Montrons que $\forall k \in K^*$, $k(K^* \cdot k) = \{k\}$. K étant W minimal à droite, on a $k(K \cdot k) = \{k\}$; or $K^* \subseteq K$ entraîne $K^* \cdot k \subseteq K \cdot k$ d'où $k(K^* \cdot k) \subseteq k(K \cdot k) = \{k\}$ avec $K^* \cdot k \neq \emptyset$ puisque $k \in K^*$ et que K^* est disjoint de W^* ; finalement $k(K^* \cdot k) = \{k\}$. CQFD.

Soit $k \in R^*$; supposons que $k^2 \in W^*$; si $k^2 \in W$, $k \in \bar{Z} \subseteq \overline{W}$ en contradiction avec $R^* \cap W^* = \emptyset$; sinon, il existe $x \in D$ tel que $k^2 x = k$; comme par ailleurs $k^2 \in \overline{W}$, l'égalité précédente entraîne $k \in \bar{Z}$, en contradiction avec la définition de R^*.

THÉORÈME 3.13' - *Tout complexe W^*-minimal à droite, K^*, est de la forme $K^* = K - Z$, où $K \in \mathcal{K}$ et $Z = K \cap \bar{Z}$.*

Soit K^* un complexe W^*-minimal à droite et K_1 un complexe W-minimal à droite quelconque $K_1 \in \mathcal{K}$. K^* et $K_1 \cap \bar{Z}$ sont disjoints car $\bar{Z} \subseteq \overline{W} \subseteq \overline{W}^*$ et $K^* \cap W^* = \emptyset$ par définition d'un complexe W^*-minimal à droite. Considérons le complexe $K = K^* + (K_1 \cap \bar{Z})$; $\bar{Z} \subseteq W^*$ et $K^* \cap W^* = \emptyset$ entraînent $K_1 \cap \bar{Z} = K \cap \bar{Z}$. On a donc $K^* = K - (K \cap \bar{Z})$. Nous démontrons que K est W minimal à droite, et d'abord que $W_K = W$.

Si $a \notin W$ et $a \notin W^*$, il existe $x \in D$ tel que $ax \in K^* \subseteq K$ donc $a \notin W_K$. Si $a \notin W$ et $a \in W^*$, il existe $x \in D$ tel que $ax \in K_1$. Comme $W^* = W \cup \overline{W}$, $a \in \overline{W}$ donc $ax \in \bar{Z}$ par définition de $\overline{W}$. Par suite $ax \in K_1 \cap \bar{Z} \subseteq K$ et $a \notin W_K$.

Inversement, si $a \notin W_K$, il existe $x \in D$ tel que $ax \in K$. Si $ax \in K^*$, $a \notin W^*$ donc $a \notin W$. Si $ax \in K \cap \bar{Z} = K_1 \cap \bar{Z} \subseteq K_1$, $a \notin W$.

K est disjoint, donc dégagé de W, car K_1 l'est et K^* l'est de W^* qui contient W. En vertu du lemme 1.4, nous aurons démontré que K est W-minimal à droite si nous prouvons que : $\forall k \in K$, $k(K \cdot k) = \{k\}$.

Soit $k \in K$ et $x \in D$ tel que $kx \in K$. Si $k \in K^*$ et $kx \in K_1 \cap \bar{Z}$, $k \in \overline{W} \subseteq \overline{W^*}$ par définition de $\overline{W}$, ce qui est en contradiction avec $K^* \cap W^* = \emptyset$. Donc $kx \in K^*$ et puisque K^* est W^*-minimal à droite, on a $kx = k$. Si $k \in K_1 \cap \bar{Z}$ et $kx \in K^*$, $k \in W^*$ puisque $\bar{Z} \subseteq W^*$, donc $kx \in W^*$ puisque W^* est un idéal, ce qui contredit encore $K^* \cap W^* = \emptyset$. Donc $kx \in K_1 \cap \bar{Z}$ et comme K_1 est W-minimal à droite, on a encore $kx = k$. CQFD.

Remarque. – Si un complexe K^* est vide, R^* l'est aussi ; R^2 est contenu dans W et $W^* = D$.

L'étude que nous venons de faire montre que, dans le cas où W est un idéal réflectif, on peut remplacer, lorsque $R^2 \subseteq W$, l'étude de R (et de W) par celle de R^* (et de W^*), qui possède, vis-à-vis de W^*, les mêmes propriétés que R vis-à-vis de W, avec, en plus, la propriété : $\forall k \in R^*$, $k^2 \notin W^*$.

L'ensemble Z des éléments de R dont le carré est dans W est d'ailleurs tel que $\bar{Z}^2 \subseteq W$ (propriété 3.3). La structure de D peut encore être représentée par le schéma suivant :

		W^*		R		
		W	W	$\bar{Z}$	R^*	
W^*	W	W	W	W	W	W
	W	W	W^*	W^*	W^*	W^*
R	$\bar{Z}$	W	W^*	W	W	
	R^*	W	W^*	W		
		W	W^*			

En revenant aux anciennes notations, nous étudierons maintenant la structure de la réunion R des complexes W-minimaux à droite d'un demi-groupe D, pour un idéal réflectif W, tel que, pour tout $k \in R$, on ait $k^2 \notin W$.

Les hypothèses précédentes sont vérifiées lorsque W est semi-premier, donc, en particulier lorsque W est premier, et notamment quand $W = \emptyset$.

Nous démontrons d'abord une propriété supplémentaire dont nous aurons besoin par la suite :

Propriété 3.5. – *Pour que $k^2 \notin W$, quel que soit $k \in R$, il faut et il suffit que, pour tout $a \in D - W$, aR ne soit pas contenu dans W.*

Supposons que, pour tout $k \in R$, on ait $k^2 \notin W$. Si $a \in D - W$, il existe $x \in D$ tel que, pour un complexe W-minimal à droite quelconque K, $ax = {}_k \in K \subseteq R$, d'où $a(xk) = k^2 \notin W$; donc $xk \notin W$ et d'après le corollaire 3.5, $xk \in R$. Il en résulte $aR \subseteq\!\!\!/ W$.

Inversement, si, pour tout $a \in D - W$, $aR \subseteq\!\!\!/ W$ et s'il existe $k \in R$ avec $k \in W$, la propriété 3.3 entraîne $kR \subseteq W$, contrairement a l'hypothèse.

Pour étudier la structure de R, nous définissons dans R une équivalence $\mathfrak{R}$ par la condition : k, $k' \in R$, $k\mathfrak{R}k'$ si et seulement si $kk' \notin W$.

THÉORÈME 3.14. - *La relation $\mathfrak{R}$ est une relation d'équivalence*

$\mathfrak{R}$ est réflexive puisque, $\forall k \in R$, $k^2 \notin W$; elle est symétrique puisque W est réflectif ; elle est transitive : si $k\mathfrak{R}k'$ et $k'\mathfrak{R}k''$, $k'k'' \notin W$ entraîne l'existence d'un élément x de D tel que $k'k''x = k'$ d'où $kk'k''x = kk' \notin W$, donc $kk'k' \notin W$, ou, W étant réflectif, $k'k''k \notin W$ et finalement $k''k \notin W$, c'est-à-dire $k\mathfrak{R}k''$.

Cette équivalence partage R en classes C_ι $(\iota \in I)$: $R = \sum_{\iota \in I} C_\iota$. Il résulte immédiatement de la définition de $\mathfrak{R}$ que, pour tout couple d'indices différents ι, λ, on a $C_\iota C_\lambda \subseteq W$.

THÉORÈME 3.15. - *Toute classe C_ι est un sous-demi-groupe simple de D, somme de ses idéaux à droite minimaux.*

1°) C_ι est un *sous-demi-groupe* : si k, $k' \in C_\iota$, $kk' \notin W$ donc il existe $x \in D$ tel que $kk'x = k$, d'où $k \cdot kk'x = k^2$. Comme $k^2 \notin W$, $k\ kk' \notin W$ avec $k \in R$ et $kk' \in R$ d'après le théorème 2.1, donc $kk' \equiv k\ (\mathfrak{R})$ et $kk' \in C_\iota$.

2°) Soit k un élément quelconque d'une classe C_ι et $D_k = D - (W \cdot k)$. Nous allons d'abord démontrer que kD_k est un idéal à droite minimal de C_ι.

D'abord, kD_k *est contenu dans* C_ι : si $d \in D_k$, $kd \notin W$, il existe $t \in D$ tel que $kdt = k$, d'où $k^2dt = k^2$; comme $k^2 \notin W$, $k \cdot kd \notin W$; par suite $kd \equiv k\ (\mathfrak{R})$ et $kd \in C_\iota$.

Dans C_ι, kD_k est un *idéal à droite* : si $c \in C_\iota$ et $d \in D_k$, $kdc \notin W$ sinon $c \cdot kd \in W$ avec $c \in C_\iota$, $kd \in C_\iota$ en contradiction avec la stabilité de C_ι.

Enfin, kD_k est un idéal à droite *minimal* de C_ι. Montrons d'abord que $kD_k = kC_\iota$; il suffit de prouver $kD_k \subseteq kC_\iota$. Puisque $k^2 \notin W$, il existe $x \in D$ tel que $k^2x = k$. D'où $kd = k \cdot kxd$; si $kd \notin W$, $kxd \notin W$ donc $kxd \in kD_k \subseteq C_\iota$ c'est-à-dire $kd = k \cdot kxd \in kC_\iota$. Remarquons que $k \in kD_k = kC_\iota$.

Supposons alors qu'il existe un idéal à droite V de C_ι vérifiant les inclusions : $V \subseteq kC_\iota \subseteq C_\iota$. Soit k' un élément quelconque de V : il existe $c \in C_\iota$ tel que $k' = kc$; d'après le théorème 2.2, il existe $d \in D$ tel que $k = k'd$; en appliquant l'égalité $kD_k = kC_\iota$ à l'élément k' de C_ι, il vient $k = k'd = k'c'$ pour un $c' \in C_\iota$, donc $k \in V$, idéal à droite de C_ι, d'où $kC_\iota \subseteq V$ et finalement

$V = kC_\iota$. C_ι étant somme de ses idéaux à droite minimaux, est simple (voir par exemple [22]).

Revenons maintenant au cas général dans lequel $R \cap W = \emptyset$ mais où il peut exister des éléments k de R tels que $k^2 \in W$.

En appliquant le théorème 3.15 à R^*, nous pouvons répresenter la structure de R^* par un schéma analogue aux schémas précédents. Notons qu'on a ici, pour $\iota \neq \lambda$, $C_\iota C_\lambda \subseteq W$, mais $C_\iota^2 = C_\iota$, car les demi-groupes C_ι étant simples [22] sont globalement idempotents. Finalement, nous pouvons énoncer :

R^*	C_{ι_1}	C_{ι_2}	C_{ι_3}	...
C_{ι_1}	C_{ι_1}	W	W	
C_{ι_2}	W	C_{ι_2}	W	
C_{ι_3}	W	W	C_{ι_3}	
...				

THÉORÈME 3.16. - *Soit D un demi-groupe admettant des complexes W-minimaux à droite, pour un idéal réflectif W, fortement large. L'ensemble R de ces complexes a la structure suivante :* $R = \bar{Z} + \sum_{\iota \in I} C_\iota$ *avec* $R\bar{Z} \subseteq W$, $\bar{Z}R \subseteq W$, $\bar{Z}^2 \subseteq W$.

Les C_ι sont des demi-groupes simples, sommes de leurs idéaux à droite minimaux, et $\forall \iota$, $\lambda \in I$, $\iota \neq \lambda$, $C_\iota C_\lambda \subseteq W$.

Lorsque W est premier, $\bar{Z}$ est vide et il n'y a qu'une seule classe modulo $\mathcal{R}$; comme nous l'avons souligné (théorème 3.9), ce cas se ramène au cas $W = \emptyset$. Les conclusions correspondantes sont énoncées à la fin de ce paragraphe (théorème 3.18). Auparavant, nous examinerons une réciproque du théorème 3.16, qui nous fournira un procédé de construction de demi-groupes admettant des complexes W-minimaux.

LEMME 3.3. - *Soit S un demi-groupe, somme d'un idéal bilatère W et d'un ensemble* $R = \sum_{\iota \in I} C_\iota$, *où les C_ι sont des demi-groupes admettant des idéaux à droite minimaux et sommes de ces idéaux, tel que* $\forall \iota$, $\lambda \in I$, $\iota \neq \lambda$, *on ait $C_\iota C_\lambda \subseteq W$. W est réflectif et D admet des complexes W-minimaux à droite.*

Soit $ab \in W$ $(a, b \in S)$; si a ou $b \in W$, $ba \in W$; sinon $a \in R$ et $b \in R$, $a \in C_\iota$, $b \in C_\lambda$ et on a $\iota \neq \lambda$ puisque $ab \in W$; donc $ba \in C_\lambda C_\iota \subseteq W$.

Posons $C_\iota = \sum_{\mu \in J_\iota} M_{\mu,\iota}$, où les $M_{\mu,\iota}$ sont les idéaux à droite minimaux de C_ι. Tout complexe K obtenu en choisissant dans les $M_{\mu,\iota}$ un élément et un seul $k_{\mu,\iota}$, μ décrivant J_ι et ι décrivant I, est W-minimal à droite.

Par construction, K est disjoint de W. Si $a \notin W$, a appartient à un C_ι ; l'idéal aC_ι est un idéal à droite minimal de C_ι dans lequel on a choisi l'élément $k_{\mu,\iota}$ de K ; il existe donc $x \in C_\iota$ tel que $ax = k_{\mu,\iota}$, d'où $a \notin W_K$. Si $a \notin W_K$ et si $a \in W$, $aS \subseteq W$, en contradiction avec $K \cap W = \emptyset$.

K est W-minimal à droite, car tout complexe ayant W pour résidu à droite et dégagé de W doit couper tous les idéaux à droite non contenus dans W en dehors de W (corollaire 3.2).

EXEMPLE. - On pourra prendre par exemple : $S = \{0\} + \sum_{\iota \in I} C_\iota$ avec la loi : $C_\iota C_\lambda = \{0\}$, $\iota \neq \lambda$; $0 \cdot C_\iota = C_\iota \cdot 0 = \{0\}$ et $W = \{0\}$.

THÉORÈME 3.17. - *Soit un demi-groupe D possédant un idéal bilatère S ayant la structure décrite au lemme 3.3 ; on suppose en outre que $a \notin W$ pour un élément a de D entraîne $aR \subseteq\!|\!= W$.*

D admet alors des complexes W-mimimaux à droite et ces complexes sont ceux de S.

Montrons d'abord que W, qui est seulement supposé idéal de S est un *idéal réflectif, fortement large de D.*

W est un idéal de D : soit $a \in D$, $w \in W \subseteq S$: $aw \in S$, idéal bilatère de D Si $aw \notin W$, $aw = r \in C_\iota$, $awaw = r^2 \in C_\iota$; or $awa \in S$, donc $awa \cdot w \in W$, il y a contradiction puisque $C_\iota \cap W = \emptyset$.

W est donc un idéal à droite de D ; on démontre de façon symétrique que W est idéal à gauche de D.

Soit $ab \in W$ (a, $b \in D$) ; si $ba \notin W$, il existe $c \in R$ tel que $bac \in C_\iota$, pour un $\iota \in I$ (puisque par hypothèse $a \notin W$ entraîne $aR \subseteq\!|\!= W$), d'où $b(acb)ac \in C_\iota$, puis $acb \notin W$ puisque W est un idéal de D et que $R \cap W = \emptyset$; comme $c \in S$, idéal bilatère de D, $acb \in C_\lambda$ pour un $\lambda \in I$; comme nous l'avons déjà signalé, les demi-groupes C_ι étant simples [22] sont globalement idempotents ; posons donc $acb = c_1 c_2$, où c_1, $c_2 \in C_\lambda$.

De $ab \in W$ résulte $c_2 a b c_1 \in W$; $c_2 a$ et bc_1 sont des éléments de S ; dans S, W est réflectif, donc $bc_1 c_2 a \in W$, d'où $bacba \in W$ en contradiction avec $bacbac \in C_\iota$. Donc $ba \in W$ et W est réflectif dans D.

W est fortement large à droite en vertu de la condition $aR \subseteq\!|\!= W$ pour tout $a \notin W$.

Montrons maintenant que *si D admet des complexes W minimaux à droite, ceux-ci sont contenus dans S.*

S est un idéal de D non contenu dans W. Donc tout complexe K admettant W pour résidu à droite coupe S (lemme 3.1). *L'intersection $K \cap S$ admet W pour résidu à droite dans D :* si $a \notin W$, $aR \subseteq\!|\!= W$ entraîne qu'il existe $r \in S$ tel que $ar \in S$, $ar \notin W$; donc il existe $x \in D$ tel que $arx \in K$, c'est-à-dire $arx \in K \cap S$. Ceci démontre l'inclusion $W_{K \cap S} \subseteq W$. L'inclusion opposée est immédiate.

Enfin, *tout complexe de S ayant W pour résidu à droite dans S, et*

disjoint de W, a le même résidu à droite dans D. Soit en effet K un complexe contenu dans S, ayant W pour résidu à droite et disjoint de W. Si $a \in D - W$, il existe $r \in S$ tel que $ar \notin W$; $ar \in S$ et il existe $x \in S$ tel que $arx \in K$; ceci prouve l'inclusion $W_K \subseteq W$ (W_K étant le résidu à droite de K dans D). Inversement, si $a \notin W_K$, il existe $x \in D$ tel que $ax \in K$; donc $a \notin W$ puisque K et W sont disjoints.

Il résulte de ce qui précède que : 1°) tout complexe W-minimal à droite de D est contenu dans S ; 2°) tout complexe W-minimal à droite dans S est W-minimal à droite dans D.

S admettant des complexes W-minimaux à droite (caractérisés au lemme 3.3), la remarque ci-dessus termine la démonstration du théorème 3.17.

Dans le cas $W = \emptyset$, nous pouvons réunir les conclusions des théorèmes 3.16 et 3.17 dans le théorème suivant :

THÉORÈME 3.18 - *Pour qu'un demi-groupe D admette des complexes nets à droite minimaux, il est nécessaire et suffisant qu'une des conditions équivalentes suivantes soit satisfaite :*

1°) *D admet des idéaux à droite minimaux.*

2°) *D admet un idéal bilatère simple N, N ayant des idéaux à droite minimaux et étant somme de ces idéaux.*

D'après le théorème 3.10, N est alors somme des idéaux à droite minimaux de D et est idéal bilatère minimum (ou noyau) de D.

Nous n'énoncerons pas les théorèmes correspondant au cas des complexes W-minimaux à gauche ; par contre nous allons examiner ce qui se passe lorsqu'un demi groupe D admet, à la fois, pour un idéal bilatère W, fortement large à gauche et à droite, des complexes W-minimaux à gauche et des complexes W-minimaux à droite.

4. Demi-groupes admettant à la fois des complexes W-minimaux à gauche et des complexes W-minimaux à droite.

Dans ce paragraphe, W est d'abord un idéal bilatère fortement large à gauche et à droite ; il existe des complexes W-minimaux à droite K, dont la réunion est R, et des complexes W-minimaux à gauche K' dont la réunion est R'.

On n'a pas en général $R = R'$, même dans des cas simples, comme on le voit sur l'exemple suivant (n° 100 de [26]) : $D = \{z, a, b, c\}$ avec $W = (z)$, $K = R = \{a, c\}$, $K' = R' = \{a, b\}$.

	z	a	b	c
z	z	z	z	z
a	z	z	z	a
b	z	a	b	a
c	z	z	z	c

PROPRIÉTÉ 1.4. - *$R \cap R'$ n'est pas vide.*

Si $k \in R$, $k \notin W$; W étant le résidu à gauche d'un complexe W-minimal à gauche quelconque K', il existe $x \in D$ tel que $xk = k' \in K' \subseteq R'$; comme $xk \notin W$, $xk \in R$ d'après le corollaire 3.5, donc $k' = xk \in K \cap K' \subseteq R \cap R'$.

PROPRIÉTÉ 4.2. - *Si pour $k \in R$ et $k' \in R'$, $kk' \notin W$, k et k' appartiennent à $R \cap R'$.*

Montrons par exemple que $k' \in R$; puisque $kk' \notin W$, il existe $x \in D$ tel que $xkk' = k'$; d'après le théorème 3.1 et le corollaire 3.5, $xkk' \in R$ d'où $k' \in R \cap R'$.

Nous supposons maintenant que W *est réflectif.* Il résulte de l'étude faite au paragraphe précédent que si R^2 n'est pas contenu dans W, on peut remplacer l'étude de R et W par celle de R^* et W^*, R^* réunion de complexes W^*-minimaux à droite étant tel que : $\forall k \in R^*$, $k^2 \notin W^*$. Le théorème suivant montre que ce remplacement peut se faire pour R ou pour R', et conduit à des réunions de complexes minimaux égales, pour des résidus à gauche et à droite égaux.

THÉORÈME 4.1. - *Lorsque W est réflectif, les conditions $R^2 \subseteq\!|\!= W$, et $R'^2 \subseteq\!|\!= W$ sont satisfaites simultanément et $W^* = W'^*$, $R^* = R'^*$; W'^* et R'^* étant définis à partir de W et R' comme W^* et R^* le sont à partir de W et de R.*

Nous savons que $R^2 \subseteq W$ équivaut à $k^2 \in W$ pour tout $k \in R$.

Supposons $R^2 \subseteq\!|\!= W$; il existe $k \in R$ tel que $k^2 \notin W$. Comme pour la propriété 4.1, considérons les éléments $x \in D$ et $k' \in K'$ tels que $xk = k' \in K' \subseteq R'$. Montrons que $k'^2 \notin W$.

$k^2 \notin W$ entraîne l'existence de $y \in D$ tel que $k^2 y = k$ d'où $xk^2 y = xk = k'$, donc $xk^2 \notin W$; or $xk^2 = k'k$; donc $k'k \notin W$ ou $kk' \notin W$; il existe donc $z \in D$ tel que $kk'z = k$, d'où $xkk'z = xk = k' \notin W$, donc $xkk' = k'^2 \notin W$.

On a donc démontré que $R^2 \subseteq\!|\!= W$ entraîne $R'^2 \subseteq\!|\!= W$; l'implication opposée se démontre de la même façon.

On a :

$$W^* = W \cup \overline{W},\ \overline{W} = \{a\ ;\ a \in D,\ ax \in R \Rightarrow axax \in W\}$$

$$W'^* = W \cup \overline{W}',\ \overline{W}' = \{a\ ;\ a \in D,\ xa \in R' \Rightarrow xaxa \in W\}.$$

Démontrons par exemple l'inclusion $\overline{W} \subseteq \overline{W}'$.

Soit $a \in \overline{W}$; supposons qu'il existe $x \in D$ tel que $xa = k' \in R'$ et que $k'^2 \notin W$. On démontre d'abord, comme précédemment, que, pour un $y \in D$ tel que $k'y = k \in R$ on a $kk' \notin W$; il résulte alors de la propriété 4.2 que $k' \in R$.

Si $ak' = axa \in W$, $xaxa = k'^2 \in W$; sinon, $ak' \in R$ (théorème 3.1) ; puisque $a \notin \overline{W}$, $ak'ak' \in W$, d'où $xak'xak' \in W$, c'est-à-dire $k'^4 \in W$. On en déduit

encore $k'^2 \in W$: si $k'^2 \notin W$, il existe $t \in D$ tel que $k'^2 t = k'$, d'où $k'^3 t = k'^2$ et $k'^3 \notin W$; alors, il existe $u \in D$ tel que $k'^3 u = k'$ d'où $k'^4 u = k'^2$, $k'^4 \notin W$, en contradiction avec la conclusion précédente.

Dans les deux cas, on voit que l'hypothèse $k'^2 \notin W$ entraîne une contradiction ; donc $k'^2 \in W$ et $a \in \overline{W'}$.

L'inclusion opposée se démontre de la même manière.

La première partie de cette démonstration montre encore que l'hypothèse $k'^2 \notin W$, pour un élément quelconque k' de R' entraîne $k' \in R$. L'égalité $R^* = R'^*$ en résulte, en tenant compte de la propriété correspondante pour tout élément k de R tel que $k^2 \notin W$.

COROLLAIRE 4.1. – *Soit D un demi-groupe admettant des complexes W-minimaux à gauche et des complexes W-minimaux à droite, pour un idéal W, réflectif et fortement large. S'il existe (au moins) un élément k d'un quelconque de ces complexes tel que $k^2 \notin W$, il existe un idéal réflectif W^*, contenant W, par rapport auquel D admet des complexes W^*-minimaux à gauche et des complexes W^*-minimaux à droite. Les réunions R^* et R'^* correspondantes sont égales et, pour tout élément k de l'ensemble commun N^*, on a $k^2 \notin W^*$.*

REMARQUE. – Les hypothèses de ce corollaire sont vérifiées lorsque W est premier et, en particulier, lorsque W est vide (cf. théorème 3.10).

Si nous décomposons l'ensemble commun $N^* = R^* = R'^*$ par l'équivalence $\mathfrak{R}$ définie au paragraphe précédent, les classes sont des demi-groupes simples, à la fois somme de leurs idéaux à droite minimaux et de leurs idéaux à gauche minimaux. Ces classes sont donc des demi-groupes complètement simples [3], [22], et nous avons le théorème général suivant :

THÉORÈME 4.2. – *Soit un demi-groupe admettant à la fois des complexes W-minimaux à gauche, dont la réunion est R, et des complexes W-minimaux à droite, dont la réunion est R', pour un idéal réflectif W (fortement large). Si, pour tout élément k de R et de R', $k^2 \notin W$, on a $R = R'$ et l'ensemble commun N a la structure suivante : $N = \sum_{\iota \in I} C_\iota$, les C_ι étant des demi-groupes complètement simples, tels que $\forall \iota, \lambda \in I$, $\iota \neq \lambda$, on ait $C_\iota C_\lambda \subseteq W$.*

REMARQUE. – S'il existe des éléments k de R ou de R' tels que $k^2 \in W$, on appliquera ce théorème à l'ensemble N^* défini précédemment et qui est l'ensemble des éléments de $R \cap R'$ dont le carré n'appartient pas à W.

Le théorème 4.2 admet pour réciproque la proposition suivante, qu'on déduit immédiatement du théorème 3.17.

THÉORÈME 4.3. – *Soit D un demi-groupe possédant un idéal bilatère S, somme d'un idéal bilatère W (W idéal de S) et d'un ensemble $N = \sum_{\iota \in I} C_\iota$, où*

les C_ι sont des demi-groupes complètement simples tels que $\forall \iota, \lambda, \iota \neq \lambda$, $C_\iota C_\lambda \subseteq W$. *On suppose de plus que* $\forall a \in D$, $a \notin W$, aN *n'est pas contenu dans* W.

D admet des complexes W-minimaux à droite et des complexes W-minimaux à gauche, et ces complexes sont ceux de S.

COROLLAIRE 4.2. - *Pour qu'un demi-groupe D admette des complexes nets à droite minimaux et des complexes nets à gauche minimaux, il est nécessaire et suffisant que D possède un idéal bilatère complètement simple.*

REMARQUE. - NUKAMURA a montré [17] que les demi groupes de HAUSDORFF compacts (espaces de HAUSDORFF, compacts, avec une multiplication associative continue), sont de tels demi-groupes.

REMARQUE. - Un homogroupe est un demi-groupe dans lequel les complexes nets à droite minimaux et les complexes nets à gauche minimaux n'ont qu'un élément [30]. En appliquant les théorèmes précédents, nous voyons d'abord que tout élément net à droite, par exemple, est net à gauche. Notons bien, à ce propos, qu'il existe des demi-groupes possédant seulement des éléments nets d'un côté [4]. Pour que la propriété précédente soit vraie, il faut et il suffit qu'il existe au moins un élément net à droite et un élément net à gauche. Montrons directement que la réunion des éléments nets est un groupe. Nous savons (théorème 4.3) que c'est une réunion de groupes. Supposons qu'il existe deux idempotents nets bilatères e et e'. Ces éléments, étant des complexes nets minimaux, peuvent être mis en correspondance comme dans le cas général, et cela de deux manières différentes, puisqu'ils sont minimaux comme complexes nets à gauche et comme complexes nets à droite. On a, par exemple, $e' = ex$, $e = ye'$, d'où

$$t = ee' = e \cdot ex = ex = e'$$

$$t = ee' = ye' \cdot e = ye' = e \quad \text{d'où} \quad e = e'.$$

On aurait pu aussi utiliser la décomposition de N en idéaux à droite (ou à gauche) minimaux.

La proposition « Tout demi-groupe abélien fini est un homogroupe » démontrée par G. THIERRIN [30] est un cas particulier du théorème suivant :

THÉORÈME 4.4 - *Si un demi-groupe abélien contient un complexe net minimal (ou, ce qui est équivalent, un idéal minimal), c'est un homogroupe.*

Ce théorème est lui-même conséquence immédiate du :

THÉORÈME 4.5. - *Si D est un demi-groupe abélien et si D possède des complexes W-minimaux, pour un idéal W fortement large, l'ensemble des éléments k de D tels que $k^2 \notin W$ est somme de groupes. Si W est premier, $D - W$ est un homogroupe.*

Car un demi-groupe complètement simple abélien est un groupe. Si W est premier, l'équivalence $\mathfrak{R}$ a une seule classe.

Nous dirons enfin quelques mots de la généralisation de la notion d'homogroupe qu'on obtient en supposant qu'il existe, pour un idéal réflectif W, des éléments, non contenus dans W, admettant W pour résidu à droite et pour résidu à gauche. Ces éléments sont évidemment W-minimaux.

DÉFINITION 4.1. - *W étant un idéal réflectif fortement large d'un demi-groupe D, on dit que D est un W-homogroupe s'il existe, dans $D - W$, des éléments admettant W pour résidu à droite et des éléments admettant W pour résidu à gauche.*

THÉORÈME 4.6. - *Ou bien un W-homogroupe est la somme d'un idéal premier et d'un homogroupe, ou bien l'ensemble $\bar{N}$, réunion des éléments W-résiduels à gauche et des éléments W-résiduels à droite, vérifie $\bar{N}^2 \subseteq W$.*

Nous avons déjà démontré (théorème 4.1) que si $k \in R$ est tel que $k^2 \notin W$, k appartient à R'. Autrement dit, tout élément W-résiduel à droite dont le carré n'est pas dans W est W-résiduel à gauche. Donc s'il existe $k \in R \cup R'$ tel que $k^2 \notin W$, k est W-résiduel à gauche et à droite.

Supposons alors que $ab \in W$ et $a \notin W$, $b \notin W$. Il existe x, $y \in D$ tels que $xa = k$, $by = k$ d'où $xaby = k^2 \in W$ en contradiction avec l'hypothèse $k^2 \notin W$; W est donc premier et $D - W$ est un homogroupe.

Supposons maintenant que, pour tous les éléments de R et de R', on ait $k^2 \in W$. On sait déjà que $R^2 \subseteq W$ et $R'^2 \subseteq W$. Montrons que $RR' \subseteq W$. Soit $k \in R$ et $k' \in R'$; si $kk' \notin W$, il existe $z \in D$ tel que $zkk' = k'$ d'où $zkk'k = k'k \notin W$, donc $kk'k \notin W$, $k^2k' \notin W$ contrairement a l'hypothèse $k^2 \in W$.

Dans [8], R. CROISOT ajoute aux notions de résidu à droite ou à gauche d'un complexe celle de résidu bilatère. Nous allons donc reprendre les problèmes des paragraphes précédents en utilisant cette notion. Nous verrons ce faisant que les résultats obtenus sont tout à fait analogues.

5. Complexes admettant un résidu bilatère donné et minimaux. Demi-groupes possédant de tel complexes.

Soit D un demi-groupe, H un complexe ($H \neq \emptyset$) et a un élément quelconque de D. On appelle *quotient bilatère* de H par a l'ensemble des couples $(x, y) \in D \times D$ tels que $xay \in H$. On le note $H \cdot\cdot a$; le *résidu bilatère* W'_H de H est alors l'ensemble des éléments w de D tels que $H \cdot\cdot w = \emptyset$. C'est un idéal bilatère. Si $W'_H = \emptyset$, on dit que H *est bilatèrement net.*

Nous dirons qu'un complexe H est *faiblement dégagé* de son résidu bilatère W'_H lorsque $H \cap D^3 \cap W'_H = \emptyset$. Tout complexe dégagé de W'_H au sens du paragraphe 1 est faiblement dégagé.

Un idéal bilatère W' est résidu bilatère si et seulement s'il vérifie la condition

$$(F_1) \qquad (DW'D \cdot D) \cdot D = (DW'D \cdot D) \cdot D \subseteq W'$$

qui s'écrit encore, puisqu'on a $W' \subseteq (DW'D \cdot D) \cdot D = (DW'D \cdot D) \cdot D$

$$(F_1') \qquad (DW'D \cdot D) \cdot D = (DW'D \cdot D) \cdot D = W'.$$

Un idéal bilatère vérifiant (F_1) ou (F_1') est dit *bilatèrement fermé* [8]. Tout idéal bilatère premier est bilatèrement fermé.

L'ensemble $\mathfrak{K}'$ des complexes ayant pour résidu bilatère un idéal bilatèrement fermé W' et faiblement dégagé de W', ordonné par l'inclusion, est stable pour la réunion, mais ne l'est pas en général pour l'intersection. Nous étudions en particulier les *points* de $\mathfrak{K}'$. Ce sont les complexes K ayant W' pour résidu bilatère, faiblement dégagés de W', et minimaux pour la condition $W'_K = W'$. Un tel complexe est dit *complexe W'-minimal bilatère* (ou W'-minimal s'il n'y a pas de confusion possible). Pour $W' = \emptyset$, on obtient les *complexes bilatèrement nets minimaux.*

Comme au paragraphe 1, l'hypothèse « faiblement dégagé du résidu W' » entraîne pour W' une propriété plus forte que « bilatèrement fermé » et qui est nécessaire pour qu'il existe des complexes W'-minimaux bilatères.

LEMME 5.1. – *Si un complexe H est faiblement dégagé de son résidu bilatère W'_H on a*

$$W'_{H-(H \cap W')} = W'_H.$$

COROLLAIRE 5.1. – *Si W' est un idéal bilatèrement fermé, tout complexe W'-minimal bilatère (s'il en existe) est disjoint de W'.*

LEMME 5.2. – *Pour qu'un idéal bilatère W' soit le résidu bilatère d'un complexe faiblement dégagé de W', il faut et il suffit qu'il vérifie la condition :*

$$(L_1) \qquad (W' \cdot D) \cdot D = (W' \cdot D) \cdot D = W'$$

qui s'écrit encore

$$DaD \subseteq W' \Leftrightarrow a \in W'.$$

La condition (L_1) est nécessaire : supposons que W' soit résidu bilatère du complexe H faiblement dégagé de W', et que $a \in D$, $DaD \subseteq W'$; si $a \notin W'$, il existe $x, y \in D$ tels que $xay \in H$, d'où, puisque $DaD \subseteq W'$, $xay \in H \cap D^3 \cap W'$ en contradiction avec l'hypothèse « H faiblement dégagé de W' ».

La condition (L_1) *est suffisante :* remarquons d'abord qu'elle entraîne la condition (F_1') ; donc si l'idéal bilatère W' $(W' \neq D)$ vérifie la condition (L_1), W' est bilatèrement fermé et est par suite résidu bilatère de certains complexes de D (par exemple de tout complexe compris entre $D^3 - DW'D$ et $D - DW'D$).

Si $a \in D - W'$, il existe $x,\ y \in D$ tels que $xay \notin W'$ (car $DaD \subseteq W'$ entraîne $a \in W'$). Le complexe $H = \{ xay ;\ xay \notin W' \}$ est disjoint de W', contenu dans D^3, donc faiblement dégagé de W'. Montrons que $W'_H = W'$. Si $a \in D - W'$, il existe $x,\ y \in D$ tels que $xay \in H$ par définition de H. Si $a \in D - W'_H$, il existe $x,\ y \in D$ tels que $xay \in H$; alors $a \notin W'$, car sinon $xay \in H \cap W'$ en contradiction avec $H \cap W' = \emptyset$.

DÉFINITION 5.1. - *Un idéal bilatère* W' *vérifiant la condition* (L_1) : $(W' \cdot\cdot D) \cdot\cdot D = (W' \cdot\cdot D) \cdot\cdot D = W'$ *est dit fortement large bilatère.*

Dans toute la suite de ce paragraphe, nous supposerons que les idéaux bilatères qui interviennent comme résidus sont fortement larges bilatères.

PROPRIÉTÉ 5.1. - *Soit* K *un complexe faiblement dégagé de son résidu bilatère* $W'_K = W'$ *et* k *un élément de* K. *Pour que* $K - \{ k \}$ *admette* W' *pour résidu bilatère, il faut et il suffit que l'ensemble* $Q_k = \{ xky ;\ (x,\ y) \in K \cdot\cdot k \}$ *soit différent de* $\{ k \}$.

Supposons que $K - \{ k \}$ admette W' pour résidu bilatère. Si $K \cdot\cdot k = \emptyset$, on a bien $Q_k = \emptyset \neq \{ k \}$. Si $K \cdot\cdot k \neq \emptyset$, $k \notin W'_K = W'_{K-\{k\}} = W'$. Il existe donc $(x,\ y) \in D \times D$ tel que $xky \in K - \{ k \}$, d'où encore $Q_k \neq \{ k \}$.

Inversement, supposons que, pour $k \in K$, on ait $Q_k = \{ k \}$, K étant faiblement dégagé de W'. Pour démontrer l'égalité $W'_K = W'_{K-\{k\}}$, il suffit de prouver l'inclusion $D - W'_K \subseteq D - W'_{K-\{k\}}$. Soit $a \in D - W'_K$ et $(x,\ y) \in D \times D$ une solution de $xay \in K$; si $xay \in K - \{ k \}$, $a \notin W'_{K-\{k\}}$. Sinon $xay = k$, d'où $k \in D^3 \cap K$, puis $k \notin W'$, puisque $K \cap D^3 \cap W' = \emptyset$; il existe alors, par hypothèse, dans le quotient non vide $K \cdot\cdot k$ un élément $(m,\ n)$ tel que $mkn = k' \neq k$, c'est-à dire $mxayn = k'$ d'où $a \notin W'_{K-\{k\}}$.

De ce lemme résulte immédiatement le théorème suivant :

THÉORÈME 5.1. - *Pour qu'un complexe* K, *faiblement dégagé de son résidu bilatère* W', *soit* W'*-minimal bilatère, il faut et il suffit que, pour tout* $k \in K$, *on ait :*

$$Q_k = \{ xky ;\ (x,\ y) \in K \cdot\cdot k \} = \{ k \}.$$

On voit que les deux démonstrations précédentes sont tout à fait semblables aux démonstrations correspondantes du paragraphe 1. Nous indiquerons seulement dans ce qui suit les différences intéressantes.

A moins d'indications contraires, K désigne un *complexe* W'*-minimal bilatère.*

PROPRIÉTÉ 5.2. - a) *Si S est à la fois un sous-demi-groupe de D et un complexe W'-minimal bilatère, on a, pour tout élément s de S ; $SsS = \{s\}$.*

b) *Pour tout élément k de K, la relation $xky \in K$ ($x, y \in D$) entraîne $xky = k$.*

c) *Quel que soit $k \in K$, il existe $x, y \in D$ tels que $xky = k$.*

d) *Si $k \in K$ et $m, n \in D$ sont tels que $mkn \notin W'$ il existe $x, y \in D$ tels que $xmkny = k$.*

e) *Si k_1 et k_2 sont deux éléments de K, la relation $x_1k_1y_1 = x_2k_2y_2 \notin W'$ entraîne $k_1 = k_2$.*

Pour deux complexes K et K' de D, admettant le même résidu bilatère W', faiblement dégagés de W', nous définissons des applications f' et φ' de la manière suivante :

1°) Une application multiforme f' de $K_1 = K - (K \cap W')$ dans K' définie par :

$$f'(k) = K' \cap DkD = \{ k' ;\ k' \in K' :\ \exists x, y \in D.\ xky = k' \}.$$

2°) L'application inverse définie pour tout $k' \in f(K_1)$ par

$$f^{-1}(k') = \{ k ;\ k \in K,\ k' \in f'(k) \}$$

c'est-à-dire ici

$$f^{-1}(k') = \{ k ;\ k \in K,\ \exists x, y \in D,\ xky = k' \}.$$

3°) Une application multiforme φ' de $K_1' = K' - (K' \cap W')$ dans K définie par

$$\varphi'(k') = K \cap Dk'D = \{ k ;\ k \in K,\ \exists x'y' \in D,\ x'k'y' = k \}$$

4°) L'application inverse de φ', définie pour tout $k \in \varphi(K_1')$ par :

$$\varphi^{-1}(k) = \{ k' ;\ k' \in K',\ \exists x', y' \in D,\ x'k'y' = k \}.$$

Ces applications s'étudient comme les applications f et φ du paragraphe 2 et ont des propriétés analogues ; en particulier, on peut énoncer les

THÉORÈME 5.2. - *Entre deux complexes K et K' W'-minimaux bilatères, il existe une correspondance bijective, définie de la façon suivante : un élément k de K et un élément k' de K' se correspondent dans la bijection f : $k' = f(k)$, si $\exists x, y \in D$ tels que $xky = k'$ ou, ce qui revient au même, si $\exists x', y' \in D$ tels que $x'k'y' = k$.*

THÉORÈME 5.3. - *Dans un demi-groupe contenant des complexes W'-minimaux, tout complexe admettant W' comme résidu bilatère et faiblement dégagé de W' contient (au moins) un complexe W'-minimal.*

Nous étudions ensuite la réunion B des complexes W'-minimaux : $B = \bigcup_{K \in \mathfrak{B}} K$.

THÉORÈME 5.4. – *Quels que soient* $m, n \in D$, $k \in K$ *(K complexe W'-minimal), ceux des éléments mk, kn, mkn qui n'appartiennent pas à W' appartiennent à B ; si, pour tout* $k \in K$, $mkn \notin W'$), *mKn est un complexe W' minimal. Si* V'_K *est l'ensemble des produits mk, kn et mkn appartenant à W', on a* $DKD = B + V'_K$.

Si K et K' sont des complexes W'-minimaux, $DKD = DK'D$; $V_K = V'_{K'}$.

THÉORÈME 5.5. – *k étant un élément quelconque de B, l'idéal bilatère DkD couvre l'idéal* $DkD \cap W'$; *nous disons qu'il est W'-minimal.*

REMARQUE. – *Lorsque* $W' = \emptyset$. *les complexes que nous étudions sont des complexes nets bilatères minimaux ; dans ce cas DkD est un idéal bilatère minimal, donc minimum : D est un demi-groupe à noyau. Les complexes nets bilatères minimaux sont les éléments du noyau ; ce sont des éléments bilatèrement nets. La réciproque est immédiate.*

LEMME 5.1. – *Une condition nécessaire et suffisante pour qu'un complexe K faiblement dégagé de W' admette W' pour résidu (W', idéal bilatère fortement large) est que K coupe tout idéal bilatère non contenu dans W' « en dehors de W' ».*

Si K admet pour résidu bilatère W' et $I \subseteq\!|\!\neq W$, il existe $i \in I$, $i \notin W'$, donc $x, y \in D$ tels que $xiy \in K \cap I$. K étant faiblement dégagé de W', $xiy \notin W'$.

Si K coupe tout idéal bilatère non contenu dans W', montrons successivement que $W'_K \subseteq W'$ et que $W' \subseteq W'_K$ (l'hypothèse « en dehors de W' » n'intervient pas). Si $a \notin W'$, $DaD \subseteq\!|\!\neq W'$ puisque W' est fortement large ; DaD coupe donc K et $a \notin W'_K$. Si $a \notin W'_K$, il existe $x, y \in D$ tels que $xay \in K$; $a \notin W'$ sinon $xay \in W'$ en contradiction avec l'hypothèse : K faiblement dégagé de W'.

COROLLAIRE 5.1. – *Si D contient des complexes W'-minimaux, D contient des idéaux bilatères W'-minimaux, et tout idéal bilatère non contenu dans W' contient (au moins) un idéal bilatère W'-minimal.*

THÉORÈME 5.5. – *Si un demi-groupe contient des complexes W'-minimaux, tous les idéaux W'-minimaux sont de la forme* $I'_m = DkD \cup W_1'$, *k étant un élément quelconque d'un complexe W'-minimal arbitraire et* W_1' *un idéal bilatère quelconque de D contenu dans W'* ($\emptyset \subseteq W'_1 \subseteq W'$).

Si Σ' *est la réunion de ces idéaux, on* $\Sigma' = B + W'$.

THÉORÈME 5.6. – *Si D possède des idéaux bilatères W'-minimaux et si tout idéal bilatère non contenu dans W' en contient au moins un, D admet des complexes W'-minimaux bilatères.*

REMARQUE. – Si W' est un idéal bilatère premier de D, ($W' \neq \emptyset$), W' est fortement large : $D - W'$ est un sous-demi-groupe ; il y a identité entre l'ensemble des complexes W'-minimaux de D et celui des complexes bilatèrement nets minimaux de $D - W'$; $D - W'$ est donc un demi-groupe à noyau, les éléments du noyau étant les complexes W'-minimaux de D.

Nous étudions maintenant la structure de B lorsque W' *est réflectif.* Comme dans le paragraphe 3, nous allons nous ramener au cas où, pour tout $k \in B$, $k^2 \notin W'$. On désignera encore par $\bar{Z}$ l'ensemble des éléments de B dont le carré appartient à W' ; pour tout complexe, K, W'-minimal, on posera : $Z = K \cap \bar{Z}$.

PROPRIÉTÉ 5.4. - *Pour tout élément $k \in Z$ et tout élément $k' \in B$, $kk' \in W'$.*

Car $kk' \notin W'$ entraîne l'existence de x, $y \in D$ tels que $xk'ky = k'$ d'où $kxk'ky = kk' \notin W'$, $kxk'k \notin W'$ et $k^2xk' \notin W'$ en contradiction avec $k^2 \in W'$.

PROPRIÉTÉ 5.5. - *Soient K_1 et K_2 deux complexes W'-minimaux de D ; si $Z_1 = K_1 \cap \bar{Z}$, $Z_2 = k_2 \cap \bar{Z}$, on a $Z_2 = f'(Z_1)$ et $Z_1 = f'^{-1}(Z_2)$.*

COROLLAIRE 5.2. - *L'ensemble $\overline{W'}$ défini par :*

$$\overline{W'} = \{\, a\,;\ a \in D,\ xay \in K \Rightarrow xay \in Z = K \cap \bar{Z} \,\}$$

est indépendant du complexe W'-minimal bilatère K.

THÉORÈME 5.7. - *Le résidu bilatère d'un complexe $K^* = K - Z$ non vide, est $\overline{W'}^* = \overline{W'} \cup \overline{W'}$. $\overline{W'}^*$ est disjoint de $B = \bigcup_{K \in \mathfrak{B}} K^*$ et c'est un idéal réflectif de D.*

Bornons-nous à démontrer que $\overline{W'}^*$ est réflectif, le reste de la démonstration ne différant pas de celle du théorème 3.12.

Soient a, $b \in D$ tels que $ab \in \overline{W'}^*$; si $ab \in W'$, $ba \in W' \subseteq \overline{W'}^*$; nous supposons donc $ab \in \overline{W'}$ et nous montrons que $ba \in \overline{W'}$. Pour cela, supposons que : $\exists x, y \in D$ tels que $xbay = k \in B$. Nous devons démontrer que $k^2 \in W'$.

Supposons que $k^2 \notin W'$.

1°) Si $(xbay \cdot xba)(bay \cdot xbay) \in W'$, nous avons aussi $bay \cdot xbay \cdot xbay \cdot xba \in W'$, puis $x \cdot bay \cdot xbay \cdot xbay \cdot xba \cdot y \in W'$ c'est-à-dire $k^4 \in W'$.

Comme $(xbay)^2 = k^2 \notin W'$, $k^2 \in B$; il existe donc x', $y' \in D$ tels que $x'k^2y' = k$; puisque $k^2 \notin W$, $x'k^2y'x'k^2y' \notin W'$, $k^2y'x'k^2 \notin W'$, $k^4y'x' \notin W'$ en contradiction avec $k^4 \in W'$.

2°) Si $(xbay)xb(ab)ay(xbay) \notin W'$, $(xbay)xb(ab)ay(xbay) \in B$, donc, puisque $ab \in \overline{W'}$, $(ybay)(xbabay)(xbay)(xbay)(xbabay)(xbay) \in W'$.

On pose $(xbabay)(xbay)(xbay) = mk^2$; de l'hypothèse faite au début de 2°) résulte, en permutant deux facteurs du produit $xbay \cdot xbabay \cdot xbay$, que $k_1 = mk^2 \notin W'$; donc il existe p, $q \in D$ tels que $pk_1q = k$; on a $k_1^2 \in W'$; si $k^2 \notin W'$, $pk_1qpk_1q \notin W'$, $k_1qpk_1 \notin W'$, $k_1^2qp \notin W'$, il y a contradiction.

Dans les deux cas 1°) et 2°), l'hypothèse $k^2 \notin W'$ entraîne une contradiction ; donc $k^2 \in W'$ et $ba \in W'$.

PROPRIÉTÉ 5.6. – *Pour que $k^2 \notin W'$ pour tout élément k de B, il faut et suffit que pour tout $a \notin W'$, on ait $BaB \subseteq\!|\!\equiv W'$.*

Supposons que, pour tout $k \in B$, $k^2 \notin W'$.

Si $a \notin W'$, il existe $x, y \in D$ tels que $xay = k \in B$, d'où $(kx)a(yk) = k^3$. Or $k^3 \notin W'$; en effet $k^2 \notin W'$ entraîne l'existence de $x', y' \notin D$ tels que $x'k^2y' = k$, d'où $kx'k^2y' = k^2$, $kx'k^2y' \notin W'$, donc $kx'k^2 \notin W'$, $k^3x' \notin W'$ et $k^3 \notin W'$. Donc kx et $yk \in B$ et $BaB \subseteq\!|\!\equiv W'$.

Inversement, si $BaB \subseteq\!|\!\equiv W'$ pour tout $a \notin W'$ et s'il existe $k \in B$ tel que $k^2 \in W'$, la propriété 5.4 entraîne $kB \subseteq W'$, $BkB \subseteq W'$ en contradiction avec l'hypothèse.

REMARQUE. – Malgré la réflectivité de W', la condition $BaB \subseteq\!|\!\equiv W'$ pour tout $a \notin W'$ paraît a priori plus forte que la condition $\forall a \notin W'$, $aB \subseteq\!|\!\equiv W'$. En fait, en présence de la condition $k^2 \notin W'$ pour tout $k \in B$, ces deux conditions sont équivalentes.

$BaB \subseteq\!|\!\equiv W'$ entraîne évidemment $aB \subseteq\!|\!\equiv W'$. Montrons que: $\forall k \in B$, $k^2 \notin W'$ et $BaB \subseteq W'$, $a \notin W'$ entraînent $aB \subseteq W'$.

Si $aB \subseteq\!|\!\equiv W'$, il existe $k \in B$ tel que $ak \notin W'$, donc $x, y \in D$ tels que $xaky = k$; $kxaky = k^2 \notin W'$ et kx, $ky \in B$ en contradiction avec $BaB \subseteq W'$.

La fin de la démonstration de la propriété 5.6 montre d'ailleurs que $aB \subseteq\!|\!\equiv W'$ pour tout $a \notin W'$ entraîne $k^2 \notin W'$ pour tout $k \in B$.

Nous sommes finalement amenés à étudier la structure de B avec l'hypothèse supplémentaire: $\forall k \in B$, $k^2 \notin W'$.

Nous décomposons B (ou B^*) en classes d'équivalence par la relation $\mathfrak{R}$ définie comme au paragraphe 3: $k, k' \in B^*$, $k \equiv k'$ $(\mathfrak{R}) \Leftrightarrow kk' \notin W'$.

THÉORÈME 5.8. – *Soit un demi-groupe admettant des complexes W'-minimaux bilatères, pour un idéal réflectif fortement large. L'ensemble B de ces complexes a la structure suivante:*

$$B = Z + \sum_{\iota \in I} C_\iota \quad \text{avec} \quad BZ \subseteq W',\ ZB \subseteq W',\ Z^2 \subseteq W'.$$

Les classes C_ι sont des demi-groupes simples de D, et $\forall \iota, \lambda \in I$, $\iota \neq \lambda$, $C_\iota C_\lambda \subseteq W'$.

Nous démontrerons seulement que les C_ι sont simples, c'est-à-dire que, pour tout $k \in C_\iota$, on a $C_\iota k C_\iota = C_\iota$.

Soit $k' \in C_\iota$; pour tout $k \in C_\iota$ et la stabilité de C_ι démontrée, $k'k \equiv k'$ $(\mathfrak{R})$ donc $k'kk' \notin W'$ et il existe $x, y \in D$ tels que $xk'k'y = k'$; comme xk', $k'y \notin W'$, xk', $k'y \in B$. L'égalité $xk'kk'y = k'$ entraîne aussi que xk' et $k'y$ appartiennent à la classe de k', c'est-à-dire C_ι, ce qui termine la démonstration.

La structure de D peut encore être représentée par le schéma suivant :

		B			
	W'	$\bar{Z}$	C_{ι_1}	C_{ι_2}	C_{ι_3}
W'	W'	W'	W'	W'	W'
$\bar{Z}$	W'	W'	W'	W'	W'
C_{ι_1}	W'	W'	C_{ι_1}	W'	W'
C_{ι_2}	W'	W'	W'	C_{ι_2}	W'
C_{ι_3}	W'	W'	W'	W'	C_{ι_3}

(B)

Nous étudions enfin une réciproque du théorème 5.8.

LEMME 5.2. - *Soit S' un demi-groupe, somme d'un idéal bilatère W' et d'un ensemble $B = \sum_{\iota \in I} C_\iota$, où les C_ι sont des demi-groupes simples, tels que* $\forall \iota, \lambda \in I, \iota \neq \lambda$, *on ait* $C_\iota C_\lambda \subseteq W'$

W' est réflectif et S' admet des complexes W'-minimaux bilatères.

Les complexes K formés en prenant dans chaque classe C_ι un élément et un seul sont W'-minimaux. Notons d'abord qu'ils sont disjoints de W'. Si $a \notin W'$, $a \in C_\iota$; C_ι étant simple, pour tout $k \in C_\iota$, $k \in C_\iota a C_\iota$, donc $a \notin W'_K$. Si $a \in W'$, $S'aS' \subseteq W'$ donc $a \in W'_K$.

La minimalité résulte du fait qu'un complexe ayant W' comme résidu bitatère et faiblement dégagé de W', doit couper tous les idéaux bilatères de D non contenus dans W', en dehors de W'.

THÉORÈME 5.3. - *Soit un demi-groupe D possédant un idéal bilatère S', S' ayant la structure décrite au lemme 5.2. On suppose en outre que D est tel que $\forall a \in D$, $a \notin W'$, BaB n'est pas contenu dans W' (ou, ce qui est équivalent, $aB \subseteq\!\!\!|\!\!= W'$). D admet alors des complexes W'-minimaux bilatères qui sont ceux de S'.*

La démonstration est à peu près la même que celle du théorème 3.17.

On montre d'abord que W' est un idéal réflectif fortement large (bilatère) de D.

Si $a \in D$ et $w \in W'$, $aw \in S'$. Si $aw \notin W'$, $aw = k \in C_\iota$, $awaw = k^2 \in C_\iota$; or $awa \in S'$ puisque $w \in S'$, idéal bilatère de D ; W' étant un idéal bilatère de S', il y contradiction avec la propriété de stabilité de C_ι. On montre de la même manière que W' est un idéal à gauche de D.

W' est réflectif : soit en effet $ab \in W'$ $(a, b \in D)$; si $ba \notin W'$, il existe un C_ι et un couple d'éléments c_1, c_2 de B tels que $c_1 bac_2 \in C_\iota$ d'où $c_1 bac_2 c_1 bac_2 \in C_\iota$.

$ac_2c_1b \notin W'$ puisque W' est un idéal de D et que $W' \cap B = \emptyset$.

Comme c_1, $c_2 \in S'$ idéal bilatère de D, $ac_2c_1b \in C_\lambda$ pour un C_λ ; posons $ac_2c_1b = c_1'c_2'$ ($c_1'c_2' \in C_\lambda$, C_λ étant globalement idempotent).

De $ab \in W'$ résulte $c_2'abc_1' \in W'$; $c_2'a$ et bc_1' sont des éléments de S' ; dans S', W' est réflectif ; donc $bc_1'c_2'a \in W'$ d'où $bac_2c_1ba \in W'$ en contradiction avec $c_1bac_2c_1bac_2 \in C_\iota$.

W' est fortement large en vertu de la condition $BaB \subseteq\!|\!\equiv W'$ quel que soit $a \notin W'$.

S' étant un idéal non contenu dans W', tout complexe K, dégagé de W' et ayant W' pour résidu bilatère, coupe S'. Montrons que l'intersection admet W' pour résidu bilatère. Si $a \notin W'$, $BaB \subseteq\!|\!\equiv W'$ entraîne l'existence de b, $b' \in B$ tels que $bab' \in S'$, $bab' \notin W'$; donc il existe x, $y \in D$ tels que $xbab'y \in K$ et finalement $xbab'y \in k \cap S'$; $a \notin W'_{K \cap S'}$. L'inclusion $W' \subseteq W'_{K \cap S'}$ est immédiate. Tout complexe W'-minimal de D est donc contenu dans S'.

De plus, tout complexe de S', disjoint de W' et admettant W' pour résidu bilatère dans S', admet le même résidu bilatère dans D.

Si K est un complexe contenu dans S', admet W' pour résidu bilatère et est disjoint de W', $a \notin W'$ entraîne l'existence de b, $b' \in B$ tels que $bab' \in S'$, $bab' \notin W'$, donc celle de x, $y \in D$ tels que $xbab'y \in K$, donc $a \notin W'_K$ (W'_K résidu bilatère de K dans D) ; enfin, si $a \notin W'_K$, il existe x, $y \in D$ tels que $xay \in K$; $a \notin W'$ puisque K est disjoint de W'.

De tout ce qui précède résulte alors :

1°) Tout complexe W'-minimal bilatère de D est contenu dans S'.

2°) Tout complexe W'-minimal bilatère de S' est W'-minimal bilatère dans D.

Le théorème est donc démontré. Dans le cas $W' = \emptyset$, nous rappellerons que :

THÉORÈME 5.4. - *Pour qu'un demi-groupe admette des complexes bilatèrement nets minimaux, il faut et il suffit qu'il contienne un idéal bilatère minimum (noyau). Ces complexes sont alors réduits à des éléments bilatèrement nets, les éléments du noyau.*

Examinons le cas abélien :

THÉORÈME 5.5. - *Si D est un demi-groupe abélien, tout complexe W-minimal au sens ordinaire est W-minimal bilatère, et réciproquement.*

Rappelons qu'en général, [8], les résidus W_H et W'_H ne coïncident pas, mais que $W_H \subseteq W'_H$. Il suffit donc de démontrer ici que l'hypothèse de minimalité entraîne l'égalité des résidus.

1) Supposons que K soit W-minimal au sens des résidus bilatères ; on sait déjà que $W_K \subseteq W'_K$. Montrons que $D - W_K \subseteq D - W'_K$. Si $a \notin W_K$,

il existe $x \in D$ tel que $ax = k \in K$; K étant W-minimal bilatère, il existe x', $y' \in D$ tels que $x'ky' = k$, d'où $x'axy' = x'ky' = k$, donc $a \notin W'_K$.

Alors K est minimal au sens ordinaire, car $W_{K-\{k\}} \subseteq W_{K-\{k\}} = W'_K = W_K$ et finalement $W_K = W_{K-\{k\}}$, $\forall k \in K$.

2) Si K est W-minimal au sens ordinaire et si $a \notin W_K$, il existe $x \in D$ tel que $ax = k$; il existe aussi $y \in D$ tel que $ky = k$ d'où $yax = yk = k$, $a \notin W'_K$. K est minimal aussi au sens des résidus bilatères, car $xky \in K$, $k \in K$, entraîne, puisque D est abélien, $xky = kyx \in K$ d'où $kyx = xky = k$.

La structure de B dans le cas abélien est donc la même q'au paragraphe précédent, ce qui est éclairé par le fait qu'un demi-groupe simple abélien est un groupe.

6. Sur les sous-demi-groupes W-minimaux d'un demi-groupe.

Dans ce paragraphe, nous étudions une relation entre deux propriétés à priori distinctes d'un complexe S de D, dans les deux cas précédemment mis en évidence : D admet des complexes W-minimaux d'un côté et D admet des complexes W-minimaux bilatères. W est donc, a priori, soit un idéal d'un côté (nous le supposerons « à droite »), fortement large de ce côté, soit un idéal bilatère fortement large (bilatère). Les propriétés que nous comparons sont :

(A) S est un sous-demi-groupe et un complexe W-minimal (d'un côté ou bilatère).

(B) S est un sous-demi-groupe W-minimal (du même côté ou bilatère), c'est-à-dire ne contient aucun sous-demi-groupe admettant pour résidu (de ce côté, ou bilatère) W.

Il est immédiat que (A) entraîne (B). Mais l'implication réciproque n'est pas évidente. Elle est cependant vraie, et l'équivalence des deux conditions permet de préciser les conditions d'existence et la structure des sous-demi-groupes W-minimaux de D.

1er cas : Demi-groupes admettant des complexes W minimaux d'un côté.

Soit D un demi-groupe admettant des complexes W-minimaux à droite.

Rappelons d'abord le corollaire 1.3 : si S est un sous-demi-groupe et un complexe W-minimal à droite, on a, $\forall s \in S$, $sS = \{s\}$.

On notera également qu'un sous-demi-groupe est toujours disjoint (donc dégagé) de son résidu,

THÉORÈME 6.1. - *Si S est un complexe ayant pour résidu à droite W, et si, $\forall s \in S$, $sS = \{s\}$, S est* 1°) *un sous-demi-groupe,* 2°) *un complexe W-minimal à droite de D, et par conséquent un sous-demi-groupe W-minimal à droite.*

La condition $sS = \{s\}$, $\forall s \in S$, entraîne évidemment que S est un sous demi-groupe ; montrons que S est un complexe W-minimal à droite, c'est-à-dire que, pour tout s de S, $s(S \cdot s) = \{s\}$.

Soit $x \in S \cdot s$, c'est-à-dire $sx = s_1 \in S$. Par hypothèse, $sS = \{s\}$, $\forall s \in S$. En multipliant à gauche par s, nous obtenons $s^2x = ss_1$ ou encore $sx = s$. CQFD.

COROLLAIRE 6.1. - *Pour que le complexe K ayant pour résidu à droite W soit à la fois un sous-demi-groupe et un complexe W-minimal à droite, il faut et il suffit que $\forall k \in K$, $kK = \{k\}$.*

Nous étudions alors les sous-demi-groupes W-minimaux à droite proprement dits.

LEMME 6.1. - *Si un sous-demi-groupe S est W-minimal à droite, la division à gauche est possible dans S.*

s étant un élément quelconque de S, le complexe $S_1 = Ss$ est un sous-demi-groupe contenu dans S ; ce sous-demi-groupe a pour résidu à droite W : si $a \notin W$, $\exists x \in D$ tel que $ax \in S$, d'où $a(xs) \in Ss$, c'est-à-dire $a \notin W_{S_1}$. Inversement, $S_1 \subseteq S$ entraîne $W_S = W \subseteq W_{S_1}$.

D'après l'hypothèse de minimalité, on a donc $Ss = S$. Cette relation, valable quel que soit $s \in S$, exprime que la division à gauche est possible dans S ; quels que soient s, $s_1 \in S$, il existe $s' \in S$ tel que $s's = s_1$.

THÉORÈME 6.2. - *Si un sous-demi-groupe S d'un demi-groupe est W-minimal à droite, on a $sS = \{s\}$ pour tout $s \in S$.*

Il faut ici, bien entendu, prendre la minimalité au sens de (B). Soit s un élément quelconque de S ; supposons que $sS \neq \{s\}$. Il existe donc au moins $s_1 \in S$ tel que $ss_1 \neq s$, $ss_1 \in S$. Nous allons démontrer que cette hypothèse entraîne une contradiction.

Le complexe $S' = S - \{s\}$ a pour résidu à droite W. Car si $a \notin W$, il existe $x \in D$ tel que $ax \in S$; si $ax \notin S - \{s\}$, on a $ax = s$; en prenant $s_1 \in S$ tel que $ss_1 \neq s$, on obtient $a(xs_1) = ss_1 \in S - \{s\}$. Finalement, $a \notin W_{S'}$. Par ailleurs, $S' \subseteq S$ entraîne $W_S = W \subseteq W_{S'}$, d'où l'égalités des résidus.

Nous avons alors l'alternative suivante :

ou bien (A_1) : Pour tout $s_1 \in S$, on a $ss_1 \neq s$.

ou bien (A_2) : Il existe $s_1 \in S$ tel que $ss_1 = s$.

$$(A_1) \qquad \forall s_1 \in S,\ ss_1 \neq s$$

Si $S - \{s\}$, dont le résidu est W, est un sous-demi-groupe, la contradiction avec l'hypothèse de minimalité pour S est établie.

Sinon, il existe dans $S - \{s\}$ deux éléments s_0 et s_0' tels que $s_0 s_0' = s$.
Soit S^* l'ensemble des éléments s^* de S vérifiant la condition :

(C) $$\forall s_1 \in S,\ s^* s_1 \neq s.$$

L'ensemble S^* n'est pas vide : il contient s, d'après (A_1).

S^* est un idéal à droite dans S (donc un sous-demi-groupe) : si $s^* \in S^*$ et si s' est un élément quelconque de S, on a $(s^* s') s_1 \neq s$, $\forall s_1 \in S$. Sinon, il existerait un $s_1 \in S$ tel que $(s^* s') s_1 = s = s^*(s' s_1)$ avec $s' s_1 \in S$, en contradiction avec la condition (C), pour s^*.

S^* n'est pas égal à S : S^* ne contient pas, en effet, l'élément s_0, défini ci-dessus, puisque $s_0 s_0' = s$.

S^* admet W pour résidu à droite ; car $S^* \subseteq S$ entraîne $W_S = W \subseteq W_{S^*}$; par ailleurs, si $a \notin W$, il existe $x \in D$ tel que $ax \in S$; si $ax \notin S^*$, on a $ax = s' \in S$ avec $s's'' = s$ pour un $s'' \in S$. D'où $a(xs'') = s's'' = s \in S^*$. S contient donc, strictement, le sous-demi-groupe S^*, ayant même résidu W, il y a contradiction avec l'hypothèse de minimalité pour S.

$$(A_2) \quad \exists s_1 \in S,\ ss_1 = s$$

Nous démontrons d'abord le lemme suivant :

LEMME 6.2. - *S étant un sous-demi-groupe W-minimal, si $ss_1 = s$ pour un couple s, $s_1 \in S$, on a $s's_1 = s'$, $\forall s' \in S$, autrement dit, s_1 est élément unité à droite dans S.*

D'après le lemme 6.1, il existe $s'' \in S$ tel que $s''s = s'$. Multiplions à droite par s_1 ; nous obtenons : $s's_1 = s''ss_1 = s''s = s'$.

Considérons alor l'ensemble $\bar{S}$ des éléments $s_1 \in S$ tels que $ss_1 = s$. $\bar{S}$ n'est pas vide, par hypothèse ; c'est un sous-demi-groupe contenu dans S. $\bar{S}$ est contenu strictement dans S ; car on a $sS \neq \{s\}$ par hypothèse. Montrons qu'il admet W pour résidu à droite ; d'une part, $W_S = W \subseteq W_{\bar{S}}$; d'autre part, si $a \notin W$, il existe $x \in D$ tel que $ax = s' \in S$; faisons la division à gauche de s_1 par s' : il existe $s'' \in S$ tel que $s''s' = s_1$.

Multiplions à gauche pas s : $ss''s' = ss_1 = s$ d'où $ss'' \cdot s's'' = ss''$. D'après le lemme 6.2, $s's''$ est élément unité à droite dans S et nous avons $s \cdot s's'' = s$, c'est-à-dire $s's'' \in \bar{S}$, $a(xs'') = s's'' \in \bar{S}$, $a \notin W_{\bar{S}}$. $\bar{S}$ est un sous-demi-groupe admettant W pour résidu à droite et contenu strictement dans S : la contradiction avec l'hypothèse de minimalité est encore établie.

THÉORÈME 6.3. - *Pour qu'un complexe K, admettant pour résidu à droite un idéal à droite W, soit un sous-demi-groupe W-minimal à droite, il faut et il suffit que : $\forall k \in K$, $kK = \{k\}$.*

Que la condition soit nécessaire résulte du théorème 6.2 ; qu'elle soit suffisante, du corollaire 6.1.

Nous étudions maintenant l'existence et la structure des sous-demi-groupes W-minimaux d'un côté lorsque W est un *idéal réflectif*.

LEMME 6.3. - *Si un demi groupe D admet des sous-demi-groupes W-minimaux à droite, pour un idéal réflectif W, on a, pour tout élément k de la réunion R des complexes W minimaux à droite, $k^2 \notin W$.*

Car $k^2 \in W$ pour un élément k d'un complexe W-minimal à droite K entraînerait, d'après la propriété 3.4, l'existence dans un sous-demi-groupe W-minimal quelconque S, d'un élément s, image par f de k, tel que $s^2 \in W$, en contradiction avec $s^2 = s$.

On a donc, dans ce cas, $R^* = R$; les classes d'équivalence C_ι modulo $\mathfrak{R}$ sont des demi-groupes simples, sommes de leurs idéaux à droite minimaux.

THÉORÈME 6.4. - *Si un demi-groupe D admet des sous-demi-groupes W-minimaux à droite, pour un idéal réflectif W, la réunion R des complexes W-minimaux à droite est un sous-demi-groupe complètement simple de D ; W est premier et D admet des complexes W-minimaux à gauche. Plus précisément, D est la somme d'un idéal bilatère premier et d'un demi-groupe admettant des complexes nets à gauche minimaux et des complexes nets à droite minimaux.*

Soit C la classe contenant un élément s d'un sous-demi-groupe W-minimal à droite S ; on a : $S \subseteq C$ car, pour tout élément s' de S, $ss' = s \notin W$. Si k est un élément quelconque de R, il existe $x \in D$ tel que $kx = s' \in S$ et $s'kx = s'^2 = s' \notin W$ d'où $s'k \notin W$ c'est-à-dire $k \equiv s' \equiv s$ $(\mathfrak{R})$.

Par suite, $R = C$; C est une somme d'idéaux à droite minimaux et contient (au moins) un idempotent : c'est donc un demi-groupe complétement simple [3].

W est premier : car si $a \notin W$, $b \notin W$, il existe x, $y \in D$ tels que : $ax = s_1 \in S$, $by = s_2 \in S$ et $axby = s_1 s_2 = s_1 \in S$; $ab \notin W$ sinon $aby \in W$, $bya \in W$, $xbya \in W$ et finalement $axby \in W$ en contradiction avec la conclusion précédente.

En appliquant le corollaire 4.2 et en tenant compte du fait que W est premier, on voit que D a la structure décrite dans l'énoncé du théorème.

Pour préciser la structure des sous-demi-groupes W-minimaux, dans le cas où W est réflectif, nous voyons qu'on peut se borner à examiner le cas $W = \emptyset$: D est alors un demi-groupe contenant à la fois des complexes nets à gauche minimaux et des complexes nets à droite minimaux ; on a $R = R' = N$, demi-groupe complètement simple. Nous poserons $N = \sum_{\iota \in I} L_\iota = \sum_{\lambda \in \Lambda} R_\lambda$, en désignant par L_ι, R_λ les idéaux à gauche minimaux et les idéaux à droite minimaux dont N est la somme.

THÉORÈME 6.5. - *Tout sous-demi-groupe S net à droite minimal est contenu dans un idéal à gauche minimal unique de D et c'est l'ensemble des idempotents de cet idéal.*

S est un complexe net à droite minimal, donc $S \subseteq N = \sum_{\iota \in I} L_\iota$. S coupe au moins un idéal à gauche minimal L_ι.

Soit $s \in S \cap L_\iota$; on a $Ss \subseteq L_\iota$. D'après le lemme 6.1, $Ss = S$ d'où $S \subseteq L_\iota$. Les idéaux à gauche minimaux étant disjoints, L_ι est unique.

Soit $E = \{ e_{\lambda,\iota} \}_{\lambda \in \Lambda}$ l'ensemble des idempotents de l'idéal à gauche minimal contenant S. D'après la relation $sS = \{ s \}$, $\forall s \in S$, tous les éléments de S sont idempotents, donc $S \subseteq E$.

E, coupant une seule fois chaque idéal à droite minimal de D, est un complexe net à droite minimal de D ; c'est aussi un sous-demi-groupe (car, dans un demi-groupe complètement simple, $e_{\lambda',\iota} e_{\lambda,\iota} = e_{\lambda'\iota}$), donc c'est un sous-demi-groupe net à droite minimal de D, d'où $S = E$.

De ce théorème et de sa démonstration, on déduit encore :

THÉORÈME 6.6. - *Pour qu'un demi groupe admette des sous-demi groupes W-minimaux, d'un côté, pour un idéal réflectif fortement large W, il faut et suffit que W soit premier et que D ait à la fois des complexes W-minimaux à droite et des complexes W-minimaux à gauche, ou encore, que $D - W$ soit un sous demi-groupe admettant à la fois des complexes nets à gauche minimaux et des complexes nets à droite minimaux.*

Le nombre (cardinal) des sous demi-groupes W-minimaux à droite, par exemple, est égal à celui des idéaux à gauche minimaux de $D - W$. Un sous-demi-groupe W-minimal d'un côté est l'ensemble des idempotents d'un idéal de l'autre côté minimal de $D - W$.

REMARQUE. - Dans un homogroupe, N est un groupe : par suite, dans un homogroupe, il existe un seul sous-demi-groupe net minimal, réduit à l'élément neutre de N (ou *élément unitif* de l'homogroupe [30].

2ème cas : Demi-groupes admettant des complexes W'-minimaux bilatères.

Tout d'abord, rappelons que si S est à la fois un sous-demi-groupe et un complexe W'-minimal *bilatère* on a : $SsS = \{ s \}$, $\forall s \in S$ (propriété 5.2). Si alors s, $s' \in S$, on a $Sss'S = \{ s \} = \{ s' \}$; S possède donc un seul élément s, nécessairement idempotent : $s^2 = s$.

Nous allons démontrer que les conditions $S = \{ s \}$, $s^2 = s$ et $W'_S = W'$ sont finalement nécessaires et suffisantes pour que S soit un *sous-demi-groupe W'-minimal bilatère.*

Que ces conditions soient suffisantes est presque immédiat ; qu'elles soient nécessaires l'est moins. Nous démontrerons donc le

Théorème 6.7. - *Si S est un sous-demi-groupe W'-minimal bilatère de D, on a $S = \{s\}$ avec $s^2 = s$.*

Soient s_1 et s_2 deux éléments quelconques d'un sous-demi groupe W'-minimal bilatère S; le complexe $S' = s_1 S s_2$ est un sous demi-groupe contenu dans S; ce sous-demi groupe a pour résidu *bilatère* W'; car si $a \notin W'$ il existe x, $y \in D$ tels que $xay \in S$ d'où $s_1 xays_2 \in s_1 S s_2$, c'est-à-dire $a \notin W'_{S'}$. Inversement, $S' \subseteq S$ entraîne $W' \subseteq W'_{S'}$. D'après l'hypothèse de minimalité, on a donc $s_1 S s_2 = S$. Donc, pour tout triple d'éléments de S: s_1, s_2, s', il existe $s'' \in S$ tel que $s' = s_1 s'' s_2$.

Soit s un élément quelconque de S; $T = \{s\}$ est un complexe W'-minimal bilatère; car si $a \notin W'$, il existe x, $y \in D$ tels que $xay = s' \in S$; s_1, s_2 étant deux éléments quelconques de S, il existe $s'' \in S$ tel que $s = s_1 s'' s' s_2$ et finalement $s_1 s'' xays_2 = s_1 s'' s' s_2 = s$ donc $a \notin W'_T$; l'inclusion inverse est immédiate, et $W'_T = W'$. Le sous-demi-groupe (s) engendré dans D par un élément quelconque de S admet donc W' pour résidu bilatère et est contenu dans S. Donc, $S = (s)$.

Si s, s_1 sont deux éléments distincts de S, $S = (s) = (s_1)$ entraîne l'existence d'entiers m et n tels que $s = s_1^m$, $s_1 = s^n$ d'où $s = s^{mn}$; d'après [19] S est fini et il contient un idempotent s'; par suite, il est réduit à cet idempotent.

Corollaire 6.2. - *Pour qu'un demi groupe contienne des sous-demi-groupes W-minimaux bilatères, il faut et il suffit qu'il contienne des idempotents ayant W' pour résidu bilatère.*

Supposons maintenant W' réflectif.

Théorème 6.8. - *Pour qu'un demi-groupe admette des sous-demi-groupes W'-minimaux bilatères, pour un idéal réflectif W', il faut et il suffit que W' soit premier et que $D - W'$ soit un sous-demi grouqe à idéal bilatère minimum N, N contenant des idempotents. (N sous-demi-groupe simple à idempotents).*

Si a, $b \notin W'$, il existe x, y, x', $y' \in D$ tels qne $xay = x'by' = e$ (e idempotent ayant W' pour résidu bilatère).

Si $ab \in W'$ on a une contradiction avec $xay \cdot x'by' = e \notin W'$ qui entraîne $ayx'b \notin W'$, $bayx' \notin W'$, $ba \notin W'$.

La structure de $D - W'$ résulte alors du théorème 5.4. Dans un demi groupe admettant un idéal bilatère minimum, les sous-demi-groupes nets bilatères minimaux, s'ils existent, sont d'après le théorème 6.7, les idempotents du noyau. La réciproque est immédiate.

CHAPITRE II.

Sur les applications homomorphes d'un demi-groupe sur un groupe (avec ou sans zéro). Premier et second théorème d'isomorphisme.

INTRODUCTION. – Dans le chapitre précédent, nous avons étudié les complexes W-minimaux d'un côté et, en particulier, les complexes $\emptyset$-minimaux ou complexes nets minimaux, dans un demi groupe D. Le point de départ de cette étude était, en fait, au début de ce travail, la recherche d'une généralisation de la notion d'homogroupe ([13], [30]).

Un homogroupe est un demi-groupe H possédant un groupe G comme idéal bilatère; il existe un homomorphisme appliquant H sur G; G est d'ailleurs, dans un certain sens, le plus grand groupe homomorphe à H ([25]).

Dans le cas sans zéro, nous avons obtenu une généralisation satisfaisante en considérant la classe des demi-groupes admettant à la fois des complexes nets à droite minimaux et des complexes nets à gauche minimaux ou, ce est équivalent, des idéaux à droite minimaux et des idéaux à gauche minimaux – ou encore un demi-groupe complètement simple sans zéro comme idéal bilatère.

La recherche, pour ces demi-groupes, du plus grand groupe homomorphe, nous a amené à approfondir le comportement, dans l'homomorphisme appliquant un demi-groupe sur un groupe, des sous-demi-groupes normaux unitaires ([12]) et plus généralement des sous demi groupes réflectifs unitaires ([12], [16] et [25]), qui constituent, pour un demi groupe, une généralisation de la notion de sous groupe distingué ou invariant d'un groupe. En particulier, certaines questions de modularité nous ont conduit à appliquer systématiquement les théorèmes d'isomorphisme démontrés par P. DUBREIL pour des groupoïdes quelconques ([11]).

En fait, nous traiterons principalement des applications homomorphes d'un demi-groupe D sur un groupe G avec zéro. L'image réciproque du zéro de G est un idéal premier W de D; en prenant $W = \emptyset$ et en ajoutant un zéro au groupe image, on applique facilement les résultats obtenus au cas d'un homomorphisme donnant un groupe comme image; il apparaîtra encore ici que certaines propriétés des demi groupes admettant des complexes W-minimaux, pour W premier, se déduisent immédiatement de celles des demi-groupes admettant des complexes nets minimaux.

7. Sur la correspondance entre groupes homomorphes à un demi-groupe D et sous-demi-groupes réflectifs unitaires de D ; hypothèses et notations.

Dans tout ce qui suit, D représente un demi-groupe, avec ou sans zéro, commutatif ou non ; $\bar{G} = \bar{G}^* + \{\bar{0}\}$, un groupe avec zéro, somme du groupe $\bar{G}^*$ et d'un zéro $\bar{0}$. Dans le treillis $\mathfrak{T}$ des équivalences définies sur D, nous considérons plus particulièrement l'ensemble $\mathfrak{S}$ des équivalences $\mathfrak{F}$ telles que l'ensemble quotient $D/\mathfrak{F}$ soit un *groupe avec ou sans zéro homomorphe à D*. Nous désignons par f l'application canonique correspondante.

La recherche des groupes homomorphes à un demi-groupe a été traitée dans [9], [12], [16] et [25] avec des conditions qui sont les suivantes (3) :

(C_1) *S est un sous-demi-groupe symétrique, fort et unitaire de D.*

(C_2) *S est un sous-demi-groupe réflectif unitaire de D.*

(C_3) *S est un sous-demi-groupe vérifiant la propriété :*

$$a,\ b,\ x \in D, \qquad axb \in S, \qquad ab \in S \Rightarrow x \in S.$$

En utilisant l'homomorphisme $D \to \bar{G}$ associé à tout S vérifiant (C_1), démontrons l'équivalence de ces trois conditions.

(C_1) $\Rightarrow$ (C_2) Soient $a,\ b \in D$, $ab \in S$; dans l'homomorphisme $D \to \bar{G} \simeq D/S$, on a $\bar{a}\bar{b} = \bar{e}$ ($\bar{e}$ élément neutre de $\bar{G}$) d'où $\bar{a}\cdot\bar{b} = \bar{e}$ donc $\bar{b}\cdot\bar{a} = \bar{e}$, c'est-à-dire $\bar{b}\bar{a} = \bar{e}$, d'où $ba \in S$.

(C_2) $\Rightarrow$ (C_1) Supposons que S vérifie la condition (C_2).

1°) Un complexe réflectif est symétrique ; car une condition nécessaire et suffisante pour qu'un complexe H soit réflectif est que : $\forall a \in D$, $H \cdot a = H \cdot a$ [30].

2°) Un sous-demi groupe réflectif et unitaire d'un côté est fort.

Il est d'abord immédiat qu'un complexe réflectif et unitaire d'un côté est unitaire de l'autre côté, donc unitaire. Supposons que $S \cdot a \mathrel{\mathcal{R}} S \cdot b$.

Soit $x \in (S \cdot a) \cap (S \cdot b)$, c'est-à-dire $ax \in S$, $bx \in S$. Démontrons par exemple l'inclusion $S \cdot a \subseteq S \cdot b$. Soit $y \in S \cdot a$, c'est-à-dire $ay \in S$. En combinant les propriétés « sous-demi-groupe » et « réflectif », on a : $ay \in S$, $ya \in S$, $xb \in S$, $yaxb \in S$ d'où $byax \in S$ et finalement, d'après la propriété « unitaire » : $by \in S$.

(C_2) $\Rightarrow$ (C_3) Supposons que : $a,\ x,\ b \in D$, $axb \in S$, $ab \in S$. S étant réflectif, on a : $xba \in S$, $ba \in S$ et, S étant unitaire, $x \in S$.

(C_3) $\Rightarrow$ (C_2) : si $ab \in S$, on a : $abab \in S$, d'où $ba \in S$ en appliquant la propriété (C_3) : S est réflectif. Si $ab \in S$ et $a \in S$, on a $aba \in S$ avec $a^2 \in S$ d'où $b \in S$ d'après la propriété (C_3) : S est unitaire.

---

(3) Nous renvoyons à [12] et au chapitre I de ce travail pour la définitions des termes employés.

Rappelons qu'un complexe S de D vérifiant une des conditions précédentes est équi-résiduel et disjoint de son résidu premier W.

Le groupe (avec ou sans zéro) homomorphe à D, correspondant à un complexe S donné, est défini comme quotient de D par une quelconque des équivalences principales $\mathcal{R}_S$ ou ${}_S\mathcal{R}$ attachées à S: $a \equiv b$ $(\mathcal{R}_S = {}_S\mathcal{R}) \leftrightarrow S.\cdot a = S.\cdot b \Leftrightarrow S\cdot.a = S\cdot.b$. Si le résidu W de S est vide, le quotient $D/S = D/\mathcal{R}_S = D/{}_S\mathcal{R}$ est un groupe; S est dit *normal unitaire* [12]. Un sous-demi-groupe normal unitaire est à la fois net et réflectif unitaire.

Si W n'est pas vide, ce quotient est un groupe avec zéro, ce zéro étant l'image de W; S est dit *pseudo-normal unitaire*. Dans ce dernier cas, $D - W$ est un sous-demi groupe de D contenant S et est appliqué par f sur le groupe avec zéro G d'après le schéma suivant:

$$\begin{array}{ccccc} S & \subseteq & (D-W) & + & W \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ e & \in & G & + & \{0\}. \end{array}$$

Dans $D - W$, S est normal unitaire; on comprend ainsi comment de nombreux résultats du cas général peuvent en fait se déduire du cas $W = \emptyset$.

Des travaux cités résulte que:

LEMME 7.1. - *Il existe une correspondance biunivoque entre l'ensemble* $\mathcal{G}$ *et l'ensemble* $\mathfrak{S}$ *des complexes* S *de* D *vérifiant une des conditions équivalentes* (C_1), (C_2) *ou* (C_3).

Si nous considérons l'ensemble $\mathcal{G}_W$ des équivalences de $\mathcal{G}$ telles que l'image réciproque $f^{-1}(\bar{0})$ soit un idéal donné W, éventuellement vide, et l'ensemble $\mathfrak{S}^W$ des complexes S correspondant, nous pouvons compléter le lemme par le

LEMME 7.2. - *Avec les relations d'ordre usuelles, les ensembles* $\mathcal{G}_W$ *et* $\mathfrak{S}_W$ *sont antiisomorphes* [25].

Notons encore que l'ensemble $\mathfrak{S}$ des complexes S de D vérifiant une des conditions (C_i), complété le cas échéant par l'ensemble vide, forme une famille de MOORE, donc est un treillis complet. Si D est un groupe, $\mathfrak{S}$ est l'ensemble des sous-groupes invariants: le treillis $\mathfrak{S}$ est alors modulaire. Nous avons étudié certains cas où l'on a encore pour $\mathfrak{S}$ cette propriété.

Dans tout ce qui suit, S représente maintenant un sous-demi-groupe réflectif unitaire propre déterminé $(S \neq \emptyset\,;\ S \neq D)$ ayant un résidu W non vide; $D/S = G$ est un groupe avec zéro homomorphe à D: $D \xrightarrow{f} \bar{G} = \bar{G}^* + \{\bar{0}\} = D/S$.

Nous utiliserons également l'extension saturée H', modulo l'équivalence d'homomorphisme, d'un complexe H de D; $H' = \{x : x \in D\,;\ \exists h \in H,\ x \equiv h(\mathfrak{S})\}$.

Si $\bar{H} = f(H)$, H' est l'image réciproque, par f^{-1}, de $\bar{H}$.

Suivant que H coupe ou non S (ou W), H' contient ou non S (ou W), car S et W sont des classes modulo $\mathfrak{S}$.

Il paraît assez remarquable que la recherche des groupes homomorphes à un demi-groupe D soit équivalente à celle des groupes homomorphes à un idéal quelconque de D. C'est ce que l'étude du paragraphe suivant fait apparaître, en établissant une correspondance entre les sous-demi-groupes réflectifs unitaires d'un idéal (bilatère) I de D et certains sous-demi-groupes réflectifs unitaires de D. On retrouve ainsi, vu sous un autre angle, un résultat de M. P. SCHUTZENBERGER ([21]).

8. Sur une correspondance entre certains sous-demi-groupes réflectifs unitaires d'un demi-groupe D et ceux d'un idéal I de D.

Soit D un demi-groupe (avec ou sans zéro), I un idéal bilatère propre de D; $\bar{G}$ un groupe avec zéro, image homomorphe de D par une application homomorphe f; I est appliqué par f *dans* $\bar{G}$. Mais $\bar{G}$ n'a pas d'idéal propre différent de l'idéal (0). Deux cas sont donc possibles :

1°) I s'applique sur le zéro de $\bar{G}$; I est donc contenu dans le résidu W du sous-demi-groupe réflectif unitaire correspondant à f.

2°) I s'applique *sur* $\bar{G}$; le sous-demi-groupe réflectif unitaire S_1 de I correspondant à la restriction f_1 de f à I est $S_1 = S \cap I$; le résidu W_1 de S_1 dans I, image inverse de $\bar{0}$ de G est $W_1 = W \cap I$, d'où le :

LEMME 8.1. - *Soit un demi-groupe D et un idéal propre de D, S un sous-demi-groupe réflectif unitaire propre de D ($S \neq D$) dont le résidu W ne contient pas I, f l'homomorphisme correspondant qui applique D sur le groupe avec zéro $\bar{G}$. La restriction de f à I applique I sur $\bar{G}$ et le sous-demi-groupe réflectif unitaire correspondant pour I est $S_1 = S \cap I$.*

Nous étudions maintenant l'extension à D d'un homomorphisme appliquant un idéal I de D sur un groupe (avec ou sans zéro).

LEMME 8.2. - *Etant donné un complexe H d'un demi-groupe D, il existe un plus petit sous-demi-groupe réflectif unitaire S_H (de D) contenant H.*

Ceci résulte immédiatement du fait que les sous-demi-groupes réflectifs unitaires de D forment une famille de MOORE. Nous dirons que S_H est le sous-demi-groupe réflectif unitaire engendré par H.

On notera que si H est net d'un côté, S_H est un sous-demi-groupe normal unitaire.

LEMME 8.3. - *Soit D un demi-groupe, I un idéal propre de D, S_1 un sous-demi-groupe réflectif unitaire de I. Le sous-demi groupe réflectif unitaire S engendré par S_1 dans D est tel que $S_1 = S \cap I$ et son résidu ne contient pas I.*

Soit X l'ensemble des éléments $x \in D$ vérifiant la condition :

(C') $\quad \exists a, b \in D$ tels que $axb \in S_1$ et $ab \in S_1$.

Cet ensemble n'est pas vide, car il contient S_1 : $S_1 \subseteq X$.

Si S' est un sous-demi-groupe réflectif unitaire de D contenant S_1, S' vérifie la condition (C) : $a, b, x \in D$, $axb \in S'$, $ab \in S' \Rightarrow x \in S'$.

Donc : $S_1 \subseteq X \subseteq S'$. En montrant que X est un sous-demi-groupe de D vérifiant cette condition (C) dans D, on aura montré que X est le sous-demi-groupe réflectif unitaire engendré par S_1 dans D. On prouvera en outre que $X = S$ vérifie la relation $X \cap I = S \cap I = S_1$.

a) *X est un sous-demi-groupe.*

Soient $x, x' \in X$; il existe $a, b, a', b' \in D$ tels que : $axb \in S_1$; $ab \in S_1$; $a'x'b' \in S_1$; $a'b' \in S_1$. S_1 est réflectif et vérifie la condition (C) dans I.

Soit $s_1 \in S_1 \subseteq I$. On a :

$$s_1(axb)s_1 \in S_1 \; ; \; s_1(ab)s_1 \in S_1$$

$$s_1(a'x'b')s_1 \in S_1 \; ; \; s_1(a'b')s_1 \in S_1$$

que nous écrivons

$$(s_1ax)(bs_1) \in S_1 \; ; \; (s_1a)(bs_1) \in S_1$$

$$(s_1a')(x'b's_1) \in S_1 \; ; \; (s_1a')(b's_1) \in S_1 .$$

I est un idéal de D contenant S_1, donc les éléments figurant dans les parenthèses appartiennent à I, d'où :

$$(bs_1)(s_1ax) \in S_1 \; ; \; (bs_1)(s_1a) \in S_1$$

$$(x'b's_1)(s_1a') \in S_1 \; ; \; (b's_1)(s_1a') \in S_1$$

d'où on déduit finalement :

$$(bs_1^2a)(xx')(b's_1^2a') \in S_1, \; (bs_1^2a)(b's_1^2a') \in S_1 \quad \text{c'est-à-dire} \quad xx' \in X.$$

b) $X \cap I = S_1$.

On a évidemment $S_1 \subseteq X \cap I$; montrons que $X \cap I \subseteq S_1$.

Soit $x \in X \cap I$. Il existe $a, b \in D$ tels que $axb \in S_1$, $ab \in S_1$. Pour un s_1 quelconque de S_1, on a : $(s_1a)x(bs_1) \in S_1$ avec $(s_1a)(bs_1) \in S_1$. Les éléments s_1a, x, bs_1 appartenant à I, on a $x \in S_1$ puisque la condition (C) est vérifiée par S_1 dans I.

c) *X possède la propriété* (C) *dans D.*

Soient a, b, $x \in D$ tels que $axb \in X$ et $ab \in X$.

Multiplions à gauche et à droite par un élément quelconque s_1 de S_1 ; puisque $S_1 \subseteq I$ et $S_1 \subseteq X$, et que X est un sous-demi-groupe, nous obtenons des éléments de X contenus dans l'idéal I, donc d'après (b) dans S_1 :

$$(s_1a)x(bs_1) \in S_1 \quad \text{et} \quad (s_1a)(bs_1) \in S_1$$

c'est-à-dire d'après la définition de X : $x \in X$.

d) *Le résidu de $X = S$ ne contient pas I.*

Car le sous-demi-groupe S est disjoint de son résidu W et $W \supseteq I$ ($\supseteq S_1$) entraînerait $W \supseteq S_1$ avec $S_1 = S \cap I$.

REMARQUE. - Si $S_1 = I$, $S = D$.

THÉORÈME 8.1. *Tout groupe (avec ou sans zéro) homomorphe à un idéal bilatère I d'un demi-groupe D est homomorphe à D.*

Nous avons souligné, dans l'introduction de ce chapitre, que l'addition d'un zéro à un groupe homomorphe à D, permettait d'appliquer les résultats du cas avec zéro, le zéro du groupe étant alors l'image de l'idéal $W = \emptyset$ de D.

Nous supposerons donc que le groupe avec zéro $\bar{G}_1$ est homomorphe à l'idéal I du demi-groupe D ($I \neq D$). Soit S_1 le sous-demi-groupe réflectif unitaire (propre) de I correspondant.

Au sous-demi-groupe réflectif unitaire (propre) S engendré par S_1 dans D correspond un groupe avec zéro $\bar{G}$ homomorphe à D ; le résidu de S ne contenant pas I, $\bar{G}$ est aussi homomorphe à I, d'après le lemme 8.1. Le sous-demi-groupe réflectif unitaire correspondant est $S \cap I$, c'est-à-dire, d'après le lemme précédent, S_1.

D'après le lemme 7.1, on a alors $\bar{G}_1 \simeq \bar{G}$ et finalement, $\bar{G}_1$ est image de D par αf ($\alpha : \bar{G} \to \bar{G}_1$; $f : D \to \bar{G}$).

REMARQUE. - Nous retrouvons ici un cas particulier d'une propriété citée par M. P. SCHUTZENBERGER dans sa Note [21], et dont l'auteur nous a communiqué une démonstration directe : soit I un idéal bilatère d'un demi-groupe D ; f un homomorphisme de I *dans* un groupe avec zéro $\bar{G}$; si $I^* = \{ i : fi \neq \bar{0} \}$ n'est pas vide, il existe un homomorphisme unique de D *dans* $\bar{G}$ se réduisant à f sur I.

THÉORÈME 8.2. - *Il existe un isomorphisme d'ensembles ordonnés entre l'ensemble des sous-demi-groupes réflectifs unitaires d'un demi-groupe D dont le résidu ne contient pas un idéal I de D et les sous-demi-groupes réflectifs unitaires de cet idéal.*

Soit $\mathfrak{S}'$ l'ensemble des sous-demi-groupes réflectifs unitaires de D dont le résidu ne contient pas un idéal (propre) I de D. $\mathfrak{S}'$ n'est pas vide, car $D \in \mathfrak{S}'$.

Soit $\mathfrak{S}_1$ l'ensemble des sous-demi-groupes réflectifs unitaires de I.

A tout $S_1 \in \mathfrak{S}_1$, on fait correspondre le sous demi-groupe réflectif unitaire S engendré par S_1 dans D. D'après le lemme 8.3, $S \in \mathfrak{S}'$. Désignons par F l'application ainsi définie : $S_1 \xrightarrow{F} S$.

F est surjectif ; car si S' est un sous-demi-groupe réflectif unitaire de D dont le résidu ne contient pas I, $S' \cap I = S_1 \in \mathfrak{S}_1$.

Si S est le sous-demi-groupe réflectif unitaire engendré par S_1 dans D, on a : $S_1 = S' \cap I = S \cap I$. D'après le lemme 8.1, les groupes (avec ou sans zéro) homomorphes à D correspondant à S et à S' sont égaux (à un isomorphisme près), d'où $S = S'$. F est injectif ; car si $S = F(S_1) = F(S_1') = S'$, on a : $S_1 = S \cap I = S' \cap I = S_1'$. Donc $\mathfrak{S}'$ et $\mathfrak{S}_1$ sont mis en correspondance biunivoque par F ; F^{-1} peut être définie par $F^{-1}(S) = S \cap I$.

Il est immédiat que chacune des applications F et F^{-1} est isotone ; donc $\mathfrak{S}_1$ et $\mathfrak{S}'$ sont isomorphes en tant qu'ensembles ordonnés (par l'inclusion).

COROLLAIRE 8.1. - *La relation d'ordre étant l'inclusion, l'ensemble des sous-demi-groupes normaux unitaires d'un demi-groupe et celui des sous-demi-groupes normaux unitaires d'un idéal bilatère quelconque I de D sont deux ensembles ordonnés isomorphes.*

Soit $\mathfrak{S}^*$ et $\mathfrak{S}_1^*$, respectivement, les ensembles des sous-demi-groupes normaux unitaires de D et de I ; on a $\mathfrak{S}_1^* \subseteq \mathfrak{S}_1$, et aussi $\mathfrak{S}^* \subseteq \mathfrak{S}'$ car le résidu des éléments de $\mathfrak{S}^*$ est vide.

Si $S_1 \in \mathfrak{S}_1^*$, $S = F(S_1)$ contenant S_1 est net dans D, car tout complexe net dans un idéal bilatère I de D est net dans D.

Inversement, si $S \in \mathfrak{S}^*$, $S_1 = S \cap I$ est net dans I.

On a donc $F(\mathfrak{S}^*) = \mathfrak{S}_1^*$ $F^{-1}(\mathfrak{S}_1^*) = \mathfrak{S}^*$; la propriété en résulte.

COROLLAIRE 8.2. - *Un demi-groupe D et un idéal quelconque I de D admettent les mêmes groupes homomorphes.*

REMARQUE. - La propriété n'est pas vraie pour les groupes avec zéro : car lorsque le résidu de S contient I, l'image de I est le zéro du groupe avec zéro, image homomorphe de D dans l'homomorphisme correspondant à S.

Nous revenons maintenant à l'étude de l'homomorphisme $D \rightarrow \bar{G}$ ($\bar{G}$ groupe avec zéro).

9. Etude des complexes de D dont l'image homomorphe est un sous-groupe de $\bar{G}$.

LEMME 9.1. - *Une condition nécessaire et suffisante pour que l'image homomorphe d'un complexe Z de D soit un sous-groupe avec zéro de $\bar{G}$ est*

que l'image homomorphe de sa trace U sur $D - W$: $U = Z \cap (D - W)$ *soit un sous-groupe de* $\bar{G}^*$.

REMARQUE. Il résulte de ce lemme que notre étude portera essentiellement sur des complexes contenus dans le sous-demi groupe $D - W$.

LEMME 9.2. - *Pour qu'un complexe* U *de* $D - W$ *ait pour image dans l'homomorphisme considéré un sous-groupe* $\bar{U}$ *de* $\bar{G}^*$, *il faut et il suffit que l'une des conditions suivantes (équivalentes) soit vérifiée :*

$$(F) \qquad u,\ u' \in U,\quad x \in D,\quad u'x \in S,\quad \Rightarrow \exists u_1 \in U,\quad ux \equiv u_1\ (\mathfrak{S})$$

$$(G)\ \begin{cases} (G_1) & u,\ u' \in U \Rightarrow \exists u_1 \in U,\quad uu' \equiv u_1\ (\mathfrak{S}) \\ (G_2) & \forall u \in U,\ uU \cap S \neq \emptyset. \end{cases}$$

REMARQUE. - Si l'on introduit l'extension saturée U' de U modulo $(\mathfrak{S})$, la condition (F) se met sous une forme équivalente (F'), que m'a signalée P. DUBREIL :

$$(F') \qquad \forall u \in U,\qquad U(S \cdot u) \subseteq U'.$$

REMARQUE. - La réflectivité de S permet de remplacer $S \cdot u$ par $S \cdot u$ dans (F') et uU par Uu dans (G_2). On notera également que (G_2) entraîne $U \subseteq D - W$.

DÉMONSTRATION. - C'est la traduction dans D, des conditions classiques pour qu'un complexe du groupe $\bar{G}^*$ soit un sous-groupe.

Nous démontrons d'abord que, si U est un sous-groupe de $\bar{G}^*$, (F) est vérifiée. Soit $u,\ u' \in U,\ x \in D,\ u'x \in S$; ces relations entraînent dans $\bar{G}$, pour les images $\bar{u}$, $\bar{u}'$ et $\bar{x}$ de u, u' et x : $\bar{u}' \cdot \bar{x} = \bar{e}$ ($\bar{e}$ élément neutre de $\bar{G}$). $\bar{U}$ étant un sous-groupe, $\bar{u} \in \bar{U}$ et $\bar{u}' \in \bar{U}$ entraînent $\bar{u} \cdot \bar{u}'^{-1} = \bar{u} \cdot \bar{x} = \overline{ux} \in \bar{U}$. De la définition de $\bar{U}$ résulte qu'il existe dans U un élément u_1 tel que $ux \equiv u_1\ (\mathfrak{S})$.

Démontrons ensuite que si (F) est vérifiée, U est un sous-groupe de $\bar{G}$.

Soit $\bar{u} \in \bar{U},\ \bar{u}' \in \bar{U}$ $(\bar{u} \neq \bar{0},\ \bar{u}' \neq \bar{0})$, images de deux éléments u et u' de U. Si x est l'inverse de $\bar{u}'$ dans $\bar{G}$, on a $\overline{u'x} = \bar{e}$ d'où $u'x \in S$. De la condition (F) on déduit l'existence de $u_1 \in U$ tel que $ux \equiv u_1\ (\mathfrak{S})$ c'est-à-dire :

$$\bar{u} \cdot \bar{u}'^{-1} = \bar{u} \cdot \bar{x} = \bar{u}_1 \in U$$

Nous démontrons enfin l'équivalence des conditions (F) et (G).

(F) $\Rightarrow$ (G) : Si U vérifie (F), U coupe S : car S étant net dans $D - W$, il existe $x \in D - W$ tel que $ux \in S$ et d'après la condition (F) appliquée en prenant $u' = u$, on voit qu'il existe $u_1 \in U$ tel que $ux \equiv u_1\ (\mathfrak{S})$ c'est-à-dire $u_1 \in S$.

Soit $u \in U$; il existe $x \in D$ tel que $ux \in S$; prenons un élément quelconque de $S \cap U$, soit $t \in S \cap U$. En appliquant la condition (F) pour u et t et remarquant que $sx \equiv x$ $(\mathfrak{F})$, $\forall x \in D$ et $\forall s \in S$, on voit qu'il existe $u_1 \in U$ tel que $tx \equiv u_1$ $(\mathfrak{F})$ d'où $x \equiv u_1$ $(\mathfrak{F})$ et $ux \equiv uu_1$ $(\mathfrak{F})$ et finalement $uu_1 \in S$. La condition (G_2) est donc vérifiée.

Soit enfin $u, u' \in U$. On a $uu' \notin W$, sinon u ou u' appartendrait à W puisque W est premier. Donc $\exists x \in D$ tel que $uu'x \in S$.

Soit u'' un élément de U tel que $u''u \in S$ (condition (G_2)). En appliquant la condition (F) à u et u'', on détermine un élément $u_1 \in U$ tel que $u''u'x \equiv u_1$ $(\mathfrak{F})$. D'après la propriété $sx \equiv x$ $(\mathfrak{F})$ $\forall x \in D$ et $\forall s \in S$, on a $x \equiv u_1$ $(\mathfrak{F})$. Si u_1' est un élément de U tel que $u_1u_1' \in S$, on voit que $xu_1' \equiv u_1u_1'$ $(\mathfrak{F})$ d'où $xu_1' \in S$. De $uu'x \in S$ résulte alors $uu' \equiv u_1'$ $(\mathfrak{F})$. La condition (G_1) est donc vérifiée.

(G) $\Rightarrow$ (F) : Soit $u'x \in S$ avec $u, u' \in U$, $x \in D$. On sait, d'après la condition (G_2), qu'il existe $u'' \in U$ tel que $u'u'' \in S$ d'où $x \equiv u''$ $(\mathfrak{F})$ et $ux \equiv uu'$ $(\mathfrak{F})$. En appliquant (G_1), on détermine $u_1 \in U$ tel que $uu'' \equiv u_1$ $(\mathfrak{F})$ d'où $ux \equiv u_1$.

On déduit de ce lemme des conditions suffisantes pour que l'image U d'un complexe U de D soit un sous-groupe de $\bar{G}^*$. En particulier :

DÉFINITION 9.1. – On dit que le complexe H du demi-groupe D est net à droite (ou à gauche) *par rapport* au complexe K de D lorsque : $\forall k \in K$, $\exists x \in D$ tel que $kx \in H$ (ou $xk \in H$). Si $H \subseteq K$ et si $\forall k \in K$, $\exists x \in K$ tel que $kx \in H$ (ou $xk \in H$) H est dit net à droite (ou à gauche) *dans* K.

THÉORÈME 9.1. – *Tout sous-demi-groupe U, unitaire d'un côté, tel que l'intersection $S \cap U$ soit nette de l'autre côté par rapport à U (ce qui entraîne $S \cap U \neq \emptyset$ et $S \cap U$ nette dans U), a pour image homomorphe un sous-groupe $\bar{U}$ de $\bar{G}^*$.*

On vérifie aisément que U satisfait, par exemple, à la condition (G).

COROLLAIRE 9.1. – *Tout sous demi-groupe U, unitaire d'un côté, contenant S et ne coupant pas W, est unitaire de l'autre côté, donc unitaire, et a pour image homomorphe par f un sous-groupe de $\bar{G}^*$.*

Démontrons que U est unitaire. Supposons U unitaire à gauche ; si $xu \in U$ avec $u \in U$, $\exists t \in D$ tel que $xut \in S \subseteq U$ car S est net dans $D - W$, d'où $t \in U$; S étant réflectif, on a : $(ut)x \in S \subseteq U$ et comme $ut \in U$, on a aussi $x \in U$: U est donc aussi unitaire à droite. La fin du corollaire se déduit immédiatement du théorème 2.1.

Parmi les complexes U de $D - W$ dont l'image homomorphe est un sous-groupe de $\bar{G}^*$, les plus intéressants sont ceux qui sont image inverse d'un sous-groupe de $\bar{G}^*$. On a immédiatement le théorème suivant :

THÉORÈME 9.2. – *Si $\bar{U}$ est un sous-groupe de $\bar{G}^*$, l'image inverse U' de $\bar{U}$ est un sous-demi groupe unitaire de D contenant S et ne coupant pas W.*

REMARQUE. - Dans une étude générale sur le comportement dans les homomorphismes des propriétés intervenant couramment dans la théorie des demi-groupes, P. DUBREIL a démontré, de plus, que U' *est fort.*

Si on prend l'image inverse d'un sous-groupe avec zéro de $\bar{G}$, on obtient :

THÉORÈME 9.3. - *Si Z est un sous-groupe avec zéro de $\bar{G}$, l'image inverse Z' de Z est la somme de l'idéal premier W et d'un sous-demi-groupe unitaire de D contenu dans $D - W$ et contenant S.*

REMARQUE. - Z' n'est ni unitaire, ni fort (cf. théorème 9.2 et rémarque précédente).

Nous étudions ensuite ceux des complexes de $D - W$ dont l'image homomorphe est un sous-groupe invariant de $\bar{G}^*$. Les conditions suivantes traduisent simplement le fait qu'une condition nécessaire et suffisante pour qu'un sous-groupe d'un groupe soit invariant est qu'il soit réflectif.

LEMME 9.3. - *Une condition nécessaire et suffisante pour que l'image $\bar{U}$ d'un complexe U de $D - W$ vérifiant l'une des conditions* (F) *ou* (G) *soit un sous-groupe invariant de $\bar{G}^*$ est qu'une des condition suivantes (équivalentes) soit vérifiée :*

(H) $\qquad u \in U, \quad a, b \in D, \quad ab \equiv u\ (\mathfrak{S}) \Rightarrow \exists u' \in U, \quad ba \equiv u'\ (\mathfrak{S})$

(H') $\qquad u \in U, \quad a, b \in D, \quad abu \in S \quad \Rightarrow \exists u' \in U, \quad bau' \in S.$

Pour démontrer l'équivalence de (H) et de (H'), il suffit de remarquer que les relations $\exists u \in U\ ab \equiv u(\mathfrak{S})$ et $\exists u' \in U\ abu' \in S$ sont équivalentes, ce qu'on voit facilement en prenant $u'' \in U$ tel que $uu'' \in S$ (condition (G_2)) et en utilisant le fait que $\forall s \in S$ et $\forall x \in D$, $sx \equiv x\ (\mathfrak{S})$. Le reste de la démonstration résulte immédiatement du fait que la condition (H) exprime que l'extension saturée U' de U modulo $\mathfrak{S}$ est réflective.

On déduit en particulier de ce lemme le théorème suivant :

THÉORÈME 9.4. - *Si U est un sous-demi-groupe réflectif de D vérifiant les deux conditions :*

(G_2) $\qquad \forall u \in U \qquad uU \cap S \neq \emptyset$

(G_3) $\qquad \forall s \in S \qquad sS \cap U \neq \emptyset$

l'image homomorphe par f de U est un sous-groupe invariant de $\bar{G}^*$.

Soit $u \in U$ tel que $abu \in S$. Nous démontrons qu'il existe $u' \in U$ tel que $ba \equiv u'\ (\mathfrak{S})$. De $abu \in S$, de la condition (G_3) et de la réflectivité de S, on déduit l'existence de x, $x' \in D$ tels que $ax \in U$ et $x'b \in U$.

U étant un sous-demi-groupe, on a $axx'b \in U$ et $axx'bu \in U$. U étant réflectif, on a : $xx'bua \in U$; de la condition (G_2) résulte que : $\exists u_1 \in U$ tel que $u_1xx'bua \in S$.

S étant réflectif et unitaire, de $abu \in S$ ou $bua \in S$ on déduit $u_1xx' \in S$. En outre, $axx'b \in U$ entraîne, puisque U est réflectif, $baxx' \in U$. De la condition (G_2) résulte que : $\exists u_1' \in U$ tel que $u_1'baxx' \in S$. Comparant $u_1xx' \in S$ et $u_1'baxx' \in S$ on déduit que $u_1 \equiv u_1'ba(\mathfrak{S})$ d'où, en prenant $u_1'' \in U$ tel que $u_1''u_1' \in S$: $u_1''u_1' \equiv u_1''u_1'ba \equiv ba$ $(\mathfrak{S})$ et en posant $u_1''u_1' = u' \in U$, $ba \equiv u'$ $(\mathfrak{S})$.

REMARQUE. - Les hypothèses du théorème 9.4 sont vérifiées, en particulier, lorsque U est un sous-demi-groupe réflectif unitaire tel que l'intersection $S \cap U$ soit nette par rapport à la réunion $S \cup U$, d'où :

COROLLAIRE 9.2. - *Tout sous-demi-groupe réflectif unitaire contenant S et ne coupant pas W a pour image homomorphe par f un sous-groupe invariant de $\bar{G}^*$.*

Ici encore, on s'intéresse spécialement à l'image inverse d'un sous-groupe invariant de $\bar{G}^*$. On obtient immédiatement le théorème suivant :

THÉORÈME 9.5. - *Si $\bar{U}$ est un sous-groupe invariant de $\bar{G}^*$, l'image inverse U' de $\bar{U}$ est un sous demi-groupe réflectif unitaire de D contenant S et ne coupant pas W.*

Ce résultat peut être complété par un théorème récent de P. DUBREIL :

THÉORÈME 9.6. - *Pour que le sous-groupe U soit invariant dans $\bar{G}^*$, il faut et il suffit que son image inverse U' vérifie, outre la condition* (G), *l'une quelconque des conditions suivantes :*

a. *U' symétrique (cf. corollaire 9.2 et théorème 9.5).*

b. *L'équivalence principale à droite définie par U' : $\mathfrak{R}_{U'}$ est régulière à gauche.*

c. *${}_{U'}\mathfrak{R}$ est régulière à droite.*

REMARQUE. - Ce théorème reste valable si l'on considère l'image inverse d'un sous-groupe avec zéro de $\bar{G}$.

Au cours de nos recherches, nous avions utilisé, pour certaines démonstrations directes, les fermetures de certains complexes U de D, dans le treillis complet des sous-demi-groupes unitaires à gauche (à droite, ou bilatères) de D.

Il ne paraît pas sans intérêt de donner ici quelques uns des résultats obtenus.

LEMME 9.4. - *Si un complexe U de D vérifie la condition (G_2) : $\forall u \in U$, $uU \cap S \neq \emptyset$, l'extension saturée U' modulo $\mathfrak{S}$ est l'ensemble X des éléments x*

de D vérifiant la condition (A) :

(A) $$\exists u \in U,\ s \in S \text{ tels que } ux = s.$$

1) $X \subseteq U'$. - Si $x \in D$ est tel que $\exists u \in U,\ s \in S,\ ux = s$, soit $u' \in U$ tel que $u'u \in S$; on a $u'ux = u's$ d'où $x \equiv u'$ $(\mathfrak{S})$ c'est-à-dire $x \in U'$.

2) $U' \subseteq X$. - Si $x \in D$ est tel que $\exists u \in U,\ x \equiv u$ $(\mathfrak{S})$, soit $u' \in U$ tel que $u'u \in S$; on a $u'x \equiv u'u$ $(\mathfrak{S})$ d'où $u'x \in S$ c'est-à-dire $x \in X$.

THÉORÈME 9.7. - *Si un complexe U de $D - W$ vérifie l'une des conditions* (F) *ou* (G) *l'extension saturée U' de U modulo $\mathfrak{S}$ est le plus petit sous-demi-groupe unitaire (à gauche, à droite et bilatère) de D contenant S et U.*

Car l'image homomorphe $\bar{U}$ de U étant un sous-groupe de $\bar{G}^*$, l'image inverse de $\bar{U}$, saturé de U modulo $\mathfrak{S}$, est un sous-demi-groupe unitaire de D contenant S et U, et c'est aussi, d'après le lemme 9.4, l'ensemble des $x \in D$ tels que $\exists u \in U,\ s \in S$ vérifiant $ux = s$. Le théorème en résulte immédiatement.

Nous poserons $U' = S \cup \bar{U}$, fermeture unitaire de $S \cup U$, prise indifféremment dans le treillis (complet) des sous-demi-groupes unitaires, à gauche, à droite ou bilatères de D.

THÉORÈME 9.8. - *Si un sous-demi-groupe réflectif U de D vérifie les conditions* (G_2) *et* (G_3) :

(G_2) $$\forall u \in U \qquad uU \cap S \neq \emptyset$$

(G_3) $$\forall s \in S \qquad sS \cap U \neq \emptyset$$

l'extension saturée de U modulo $\mathfrak{S}$ est le plus petit sous-demi-groupe réflectif unitaire de D contenant S et U.

Car l'image homomorphe de $\bar{U}$ est un sous-groupe U invariant dans $\bar{G}^*$ (théorème 2.4) dont l'image inverse est un sous-demi-groupe réflectif unitaire de D contenant S et U. Comme c'est déjà le plus petit sous-demi-groupe unitaire de D contenant S et U, le théorème est démontré.

COROLLAIRE 9.3 - *Si U vérifie les hypothèses du théorème précédent et est de plus unitaire, U' peut être défini par les conditions équivalentes suivantes :*

(A) $$x \in U' \Leftrightarrow \exists u U,\ s \in S \text{ tels que } ux = s$$

(B) $$x \in U' \Leftrightarrow \exists u' U,\ s' \in S \text{ tels que } s'x = u'.$$

REMARQUE. - Ce corollaire permet de caractériser simplement, moyennant certaines conditions, l'union de deux sous-demi-groupes réflectifs unitaires dans le treillis de ces sous-demi-groupes.

10. **Premier théorème d'isomorphisme.**

Nous appliquons à l'ensemble formé par D et le groupe avec zéro homomorphe $\bar{G}$, des théorèmes de P. DUBREIL qui étendent à des groupoïdes quelconques les théorèmes d'isomorphisme pour les groupes ([11]).

Les résultats obtenus, non seulement contiennent le cas des groupes, mais confirment que les sous-demi-groupes réflectifs unitaires, et plus spécialement les sous-demi-groupes normaux unitaires, constituent une bonne généralisation pour les demi-groupes de la notion de sous-groupe invariant, en particulier dans le cas d'un demi-groupe possédant un sous-demi-groupe normal unitaire minimum.

Nous énoncerons d'abord le premier théorème général de P. DUBREIL [11].

THÉORÈME 10.1. – *Si l'on a l'homomorphisme* $E \xrightarrow{f} \bar{E}$, *où* E *et* $\bar{E}$ *sont deux groupoïdes, il y a correspondance biunivoque entre les équivalences* $\mathfrak{R}$ *de* E, *régulières d'un côté et contenant l'équivalence d'homomorphisme* $\mathfrak{F}$, *et les équivalences* $\bar{\mathfrak{R}}$ *de* $\bar{E}$, *régulières du même côté. Les ensembles quotients se correspondent biunivoquement, les relations* $x \equiv x'$ $(\mathfrak{R})$ *et* $\bar{x} \equiv \bar{x}'$ $(\bar{\mathfrak{R}})$ *étant vérifiées en même temps.* $\mathfrak{R}$ *et* $\bar{\mathfrak{R}}$ *sont régulières en même temps et la correspondance entre les groupoïdes quotients est alors un isomorphisme ;* $E/\mathfrak{R} \simeq \bar{E}/\bar{\mathfrak{R}}$.

REMARQUE. – Il résulte immédiatement des définitions respectives de $\mathfrak{R}$ et de $\bar{\mathfrak{R}}$ que la correspondance précédente est un isomorphisme d'ensembles ordonnés entre l'ensemble des équivalences de E, régulières d'un côté et contenant $\mathfrak{F}$, et celui des équivalences de $\bar{E}$, régulières du même côté.

REMARQUE. – *La correspondance entre* $E/\mathfrak{R}$ *et* $\bar{E}/\bar{\mathfrak{R}}$ *est définie par :*

$$A \in E/\mathfrak{R},\ \bar{A} \in \bar{E}/\bar{\mathfrak{R}},\ A \leftrightarrow \bar{A} \Leftrightarrow \exists a \in A,\ \exists \bar{a} \in \bar{A},\ \bar{a} = f(a)$$

ce qui montre que $\bar{A}$, en tant que complexe, est l'image homomorphe de A par f et A l'image inverse de $\bar{A}$.

Nous démontrons les proposition suivantes en prenant, avec les notations des paragraphes 1 et 2, $E = D$, $\bar{E} = \bar{G}$.

LEMME 10. – *Si* $\mathfrak{R}$ *est une équivalence régulière d'un côté contenant* $\mathfrak{F}$, *la classe* U *modulo* $\mathfrak{R}$ *contenant* S *est un sous-demi-groupe unitaire de* D *ne coupant pas* W ; $\mathfrak{R}$ *coïncide avec l'équivalence principale du même côté définie par* U *dans* D *et est simplifiable du même côté sur* $D - W$.

Nous raisonnons sur des équivalences régulières à droite.

1°) Si $\bar{\mathfrak{R}}$ est l'équivalence régulière à droite induite par $\mathfrak{R}$ dans $\bar{G}$, l'image de U dans l'homomorphisme appliquant D sur $\bar{G}$ est la classe modulo $\bar{\mathfrak{R}}$ contenant l'élément neutre de $\bar{G}$, c'est-à-dire un sous-groupe U de $\bar{G}^*$; U est l'image inverse de $\bar{U}$, c'est-à-dire un sous-demi-groupe unitaire de D contenant S et ne coupant pas W.

2°) $\mathcal{R}$ est simplifiable à droite sur $D - W$. Soit $ax, bx \in D - W$; $ax \equiv bx\ (\mathcal{R})$. On a, dans $\bar{G}$, $\bar{a}\bar{x} = \bar{a}\cdot\bar{x} \neq 0$, $\bar{b}\bar{x} = \bar{b}\cdot\bar{x} \neq 0$ et $\bar{a}\cdot\bar{x} \equiv \bar{b}\cdot\bar{x}\ (\mathcal{R})$; $\mathcal{R}$, équivalence régulière à droite d'un groupe avec zéro est simplifiable à droite sur $\bar{G} - \{\bar{0}\}$. Donc, on a $\bar{a} \equiv \bar{b}\ (\mathcal{R})$ d'où $a \equiv b\ (\mathcal{R})$.

3°) Soit $\mathcal{R}_U$ l'équivalence principale à droite définie par U dans D. Montrons que $\mathcal{R} = \mathcal{R}_U$. Soit $a \equiv b\ (\mathcal{R})$. Pour démontrer que $a \equiv b\ (\mathcal{R}_U)$ il suffit de prouver que $ax \in U$ entraîne $bx \in U$. Or U est une classe modulo $\mathcal{R}$; de $a \equiv b\ (\mathcal{R})$ on déduit $ax \equiv bx\ (\mathcal{R})$ quisque $\mathcal{R}$ est régulière à droite, donc $ax \in U$ entraîne $bx \in U$.

Soit $a \equiv b\ (\mathcal{R}_U)$ c'est-à-dire $U \cdot a = U \cdot b$. Si $U \cdot a = U \cdot b = \emptyset$, a et b appartiennent au résidu à droite W_U de U dans D. De $S \subseteq U$, on déduit $W_U \subseteq W$, d'où $a, b \in W$ c'est-à-dire $a \equiv b\ (\mathcal{S})$. De $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{R}$ résulte alors $a \equiv b\ (\mathcal{R})$. Si $U \cdot a = U \cdot b \neq \emptyset$, $\exists y \in D$ tel que $ay \in U$, $by \in U$ c'est-à-dire $ay \equiv by\ (\mathcal{R})$. U ne coupant pas W ay et by appartiennent à $D - W$ sur lequel $\mathcal{R}$ est simplifiable à droite. Donc on a $a \equiv b\ (\mathcal{R})$.

LEMME 10.2. - *Il existe un isomorphisme d'ensembles ordonnés entre l'ensemble des demi-groupes unitaires de D contenant S et ne coupant pas W et celui des équivalences régulières d'un côté contenant $\mathcal{S}$.*

1°) A toute équivalence régulière à droite $\mathcal{R}$ contenant $\mathcal{S}$, nous faisons correspondre la classe modulo $\mathcal{R}$ contenant S. Nous avons démontré que cette classe U était un sous-demi-groupe unitaire de D contenant S et ne coupant pas W, et qu'on avait $\mathcal{R} = \mathcal{R}_U$ équivalence principale à droite définie dans D par U.

2°) L'application ainsi définie est injective : si $\mathcal{R} \neq \mathcal{R}'$ on a $U \neq U'$; car $U = U'$ entraîne $\mathcal{R} = \mathcal{R}_U = \mathcal{R}_{U'} = \mathcal{R}'$.

3°) Cette application est surjective : car si U est un sous-demi-groupe unitaire de D contenant S et ne coupant pas W, l'équivalence principale à droite $\mathcal{R}_U$ est régulière à droite et U est la classe modulo $\mathcal{R}_U$ contenant S.

En outre, on a $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{R}_U$. Soit en effet $a \equiv b\ (\mathcal{S})$ et $ax \in U$; puisque U ne coupe pas W, il existe $t \in D$ tel que $axt \in S \subseteq U$; U étant unitaire, on a $t \in U$; $\mathcal{S}$ est régulière, donc $axt \equiv bxt\ (\mathcal{S})$ d'où $bxt \in S \subseteq U$ et finalement $bx \in U$.

4°) Cette correspondance est un isomorphisme d'ensembles ordonnés. Supposons d'abord que : $U \subseteq U'$; U et U' étant des sous-demi-groupes unitaires de D contenant S et ne coupant pas W. Soit $a \equiv b\ (\mathcal{R}_U)$. Montrons que $ax \in U'$ entraîne $bx \in U'$. Puisque $U' \cap W = \emptyset$, il existe $t \in D$ tel que $axt \in S \subseteq U \subseteq U'$ d'où $t \in U'$. $\mathcal{R}_U$ étant régulière à droite, on a $axt \equiv bxt\ (\mathcal{R}_U)$ d'où $bxt \in U \subseteq U'$ et finalement $bx \in U'$.

Supposons maintenant que $\mathcal{R}_U \subseteq \mathcal{R}_{U'}$, $\mathcal{R}_U$ et $\mathcal{R}_{U'}$ étant les équivalences

principales à droite définies par les sous-demi-groupes U et U', unitaires, contenant S et ne coupant pas W.

Nous démontrons d'abord que : $\forall u \in U$ et $\forall u' \in U'$, $u' \equiv uu' \ (\mathcal{R}_{U'})$

a. $u'x \in U$ entraîne évidemment $uu'x \in U$.

b. si $uu'x \in U$, on a $u'x \in U$ puisque U est unitaire.

Nous avons alors, $\forall u \in U$ et $\forall u' \in U'$, $u' \equiv uu' \ (\mathcal{R}_U)$ d'où $u' \equiv uu' \ (\mathcal{R}_{U'})$; puis $u'^2 \equiv uu'^2 \ (\mathcal{R}_{U'})$ c'est-à-dire $uu'^2 \in U'$ puisque U' est une classe modulo $\mathcal{R}_{U'}$. Finalement, U' étant unitaire, on obtient, $\forall u \in U$, $u \in U'$ donc $U \subseteq U'$. Ce résultat contient la propriété classique des groupes :

THÉORÈME 10.2. – *Il existe un isomorphisme d'ensembles ordonnés entre l'ensemble des sous groupe de G^* et celui des équivalences régulières d'un côté du groupe avec zéro $\bar{G}$.*

Des théorèmes 10.1 et 10.2, et du lemme 10.2, on déduit :

THÉORÈME 10.3. – *Soit $\bar{G}$ un groupe avec zéro homomorphe à un demi-groupe, D, S le sous-demi groupe réflectif unitaire de D correspondant : $\bar{G} \simeq D/S$, W le résidu de S dans D. Il existe un isomorphisme d'ensembles ordonnés entre l'ensemble des sous-groupes $\bar{U}$ de $\bar{G} - \{\bar{0}\}$ et celui des sous-demi-groupes unitaires U de D contenant S et ne coupant pas W.*

REMARQUE. – $\bar{U}$ est l'image par f de U et U est l'image inverse de $\bar{U}$.

LEMME 10.3. – *Si $\mathcal{R}$ est régulière dans D, U est réflectif et réciproquement.*

Notons d'abord (théorème 10.1) que $\mathcal{R}$ et $\bar{\mathcal{R}}$ sont régulières en même temps. Si $\mathcal{R}$ est régulière, soit $ab \in U$; $\overline{ab} = \bar{a} \cdot \bar{b} \in \bar{U}$ qui est un sous-groupe invariant de $\bar{G}$, d'où $\bar{b} \cdot \bar{a} = \overline{ba} \in \bar{U}$ et $ba \in U$.

Inversement, si U est réflectif, $\bar{U}$ est un sous-groupe invariant de $\bar{G}$ (corollaire 9.2). Donc $\bar{\mathcal{R}}$ est régulière et $\mathcal{R}$ aussi.

On peut d'ailleurs observer, pour abréger cette démonstration, que la réflectivité des complexes se conserve dans un homomorphisme lorsqu'on prend un complexe U de E image inverse d'un complexe $\bar{U}$ de $\bar{E}$ ($E \to \bar{E}$).

Nous pouvons maintenant énoncer le théorème correspondant au premier théorème d'isomorphisme pour les groupes.

THÉORÈME 10.4. (Premier théorème d'isomorphisme). – *Il existe un isomorphisme d'ensembles ordonnés entre l'ensemble des sous-groupes distingués $\bar{U}$ de $\bar{G} - \{\bar{0}\}$ et celui des sous-demi-groupes réflectifs unitaires U de D, contenant S et ne coupant pas W.*
En outre, on a l'isomorphisme de groupes avec zéro : $D/U \simeq \bar{G}/\bar{U}$.

On déduit de ce théorème une propriété intéressante de certains ensembles de sous-demi-groupes réflectif unitaires :

THÉORÈME 10.5. - *Dans un demi-groupe quelconque, les sous demi-groupes réflectifs unitaires de D contenant un sous-demi-groupe réflectif unitaire S et ne coupant pas le résidu W de S forment un treillis complet modulaire. L'élément nul de ce treillis est S et l'élément universel D — W.*

Car cet ensemble est isomorphe, au sens des ensembles ordonnés, à celui des sous-groupes invariants d'un groupe.

Ce théorème met en évidence une classe de demi-groupes qui généralise, du point de vue ensemble des sous-groupes distingués, celle des groupes : les demi-groupes possédant un sous-demi-groupe normal unitaire minimum.

THÉORÈME 10.6. - *Si un demi-groupe D admet un sous-demi-groupe normal unitaire minimum, l'ensemble des sous-demi-groupe normaux unitaires de D forme un treillis complet modulaire.*

Nous donnons au paragraphe 12 des exemples de tels demi-groupes.

11. Second théorème d'isomorphisme.

Nous donnons d'abord le second théorème d'isomorphisme démontré par P. DUBREIL ([11]) pour des groupoïdes quelconques, du point de vue « équivalences régulières ».

THÉORÈME 11.1. - *Soit $\mathcal{S}$ une équivalence régulière dans un groupoïde E, M un sous-ensemble de E, M' l'extension saturée de M par $\mathcal{S}$, $\mathcal{S}_M$ et $\mathcal{S}_{M'}$ les restrictions de $\mathcal{S}$ à M et M'; $\bar{E} = E/\mathcal{S}$ le groupoïde-quotient; $\bar{M}$ l'image du sous-ensemble M de E dans l'homomorphisme appliquant E sur $\bar{E}$. Si M est un sous-groupoïde de E, $M = Z$, l'équivalence $\mathcal{S}_M = \mathcal{S}_Z$ est régulière, Z' extension saturée de Z par $\mathcal{S}$ est un sous-groupoïde de E et on a les isomorphismes :*

$$Z/\mathcal{S}_Z \simeq Z'/\mathcal{S}_{Z'} \simeq \bar{Z} = \bar{Z}'.$$

REMARQUE. - La correspondance entre $Z/\mathcal{S}_Z$ et $Z'/\mathcal{S}_{Z'}$ est définie par :

$$X \in Z/\mathcal{S}_Z,\ X' \in Z'/\mathcal{S}_{Z'},\ X \longleftrightarrow X' \longleftrightarrow \exists x \in X \cap Z,\ x' \in X' \cap Z'\ x \equiv x'\ (\mathcal{S}).$$

Si nous appliquons ce théorème à un demi-groupe D dans lequel le sous-demi-groupe réflectif unitaire S ($S \neq \emptyset$, $S \neq D$), admettant un résidu W, éventuellement vide, définit une équivalence régulière $\mathcal{S}$, équivalence associée à l'homomorphisme appliquant D sur le groupe avec zéro $\bar{G} = D/S$ (si $W = \emptyset$, $\emptyset \rightarrow \bar{0} \in \bar{G}$), nous obtenons le théorème suivant :

THÉORÈME 11.2. - *Si Z est un sous-demi-groupe de D, l'équivalence d'homomorphisme $\mathcal{S}_Z$ restreinte à Z est régulière, l'extension saturée Z' de Z par $\mathcal{S}$*

est un sous-demi-groupe et l'on a les isomorphismes (de demi-groupes):

$$(I) \qquad Z/\mathfrak{S}_Z \simeq Z'/\mathfrak{S}_{Z'} \simeq Z = \bar{Z}'.$$

Nous étudions ici le cas où (I) est une suite d'isomorphismes de groupes avec zéro.

THÉORÈME 11.3. – *Une condition nécessaire et suffisante pour que* (I) *soit une suite d'isomorphismes de groupes avec zéro est que la trace U de Z sur* $D - W$: $U = Z \cap (D - W)$ *vérifie la condition* (G_2):

$$(G_2) \qquad \forall u \in U,\ uU \cap S \neq \emptyset.$$

Nous étudions alors le passage des équivalences régulières $\mathfrak{S}_Z$ à des équivalences principales, qui permettent de donner une version « sous-algèbre » du second théorème d'isomorphisme :

LEMME 11.1. – *Si Z coupe S, on a* $S \cap Z = S \cap U$.

Si $\mathfrak{R}_{S\cap U}(s_{\cap U}\mathfrak{R})$ *est l'équivalence principale à droite (à gauche) définie dans U par* $S \cap U$, *on a alors*:

$$\mathfrak{S}_U \subseteq \mathfrak{R}_{S\cap U} = s_{\cap U}\mathfrak{R}\,; \qquad \mathfrak{S}_Z \subseteq \mathfrak{R}_{S\cap Z} = s_{\cap Z}\mathfrak{R}\,.$$

U'(Z') étant le saturé de U(Z) modulo $\mathfrak{S}$, *on a*:

$$S \subseteq U' \subseteq Z'$$

Si $\mathfrak{R}_S(\mathfrak{R}'_S)$ *est l'équivalence principale (à droite ou à gauche) définie dans U'(Z') par S, on a enfin*:

$$\mathfrak{S}_{U'} \subseteq \mathfrak{R}_S\,; \qquad \mathfrak{S}_{Z'} \subseteq \mathfrak{R}'_S.$$

DÉMONSTRATION. – Notons d'abord que $S \cap U$ est réflectif unitaire dans U: si $uxu' \in S \cap U$, $uu' \in S \cap U$ avec $u, x, u' \in U$, on a $x \in S$ d'après la propriété (C) vérifiée par S (voir le paragraphe 8); d'où $x \in S \cap U$, ce qui montre que $S \cap U$ vérifie la propriété (C) dans U. De même, $S \cap Z$ $(= S \cap U)$ est réflectif unitaire dans Z. Car $zxz' \in S \cap Z$, $zz' \in S \cap Z$, avec $z, x, z' \in Z$, entraîne d'abord, puisque $S \cap W = \emptyset$, $z, x, z' \in D - W$ c'est-à-dire $z, x, z' \in U$ et la démonstration se termine comme ci-dessus.

En particulier, dans $U(Z)$, $S \cap U$ $(S \cap Z)$ est un complexe symétrique et l'on a

$$\mathfrak{R}_{S\cap U} = s_{\cap U}\mathfrak{R}\,; \qquad \mathfrak{R}_{S\cap Z} = s_{\cap Z}\mathfrak{R}.$$

Si $u \equiv u'$ $(\mathcal{L}_U)$ avec $u, u' \in U$, nous démontrons que $u \equiv u'$ $(\mathcal{R}_{S\cap U})$. Pour cela il suffit de prouver que $u, u', x \in U$, $ux \in S \cap U$ entraîne $u'x \in S \cap U$. $ux \in S \cap U$ entraîne $ux \in S$ et, d'après l'hypothèse, $u'x \in S$; comme $x \in U$, $u'x \in U$ d'où $u'x \in S \cap U$.

$\mathcal{L}_Z \subseteq \mathcal{R}_{S\cap Z}$ se démontre de la même manière en remarquant que $zx \in S$ entraîne $z \in U$. Les inclusions $S \subseteq U' \subseteq Z'$ résultent de ce que, pour un élément quelconque u de $S \cap U$ et $\forall s \in S$, on a $s \equiv u$ $(\mathcal{L})$ d'où $s \in U' \subseteq Z'$.

Enfin, si $u', u_1' \in U'$, $u' \equiv u_1'$ $(\mathcal{L}_{U'})$ et $u'x \in S$ avec $x \in U'$, on a $u_1'x \in S$ c'est-à-dire $u' \equiv u_1'$ $(\mathcal{R}_S)$ d'où $\mathcal{L}_{U'} \subseteq \mathcal{R}_S$.

LEMME 11.2. – *Si Z est un sous-demi-groupe de D dont la trace U sur $D - W$ vérifie la condition* (G_2) : $\forall u \in U$, $uU \cap S \neq \emptyset$, *on a :*

$$\mathcal{L}_U = \mathcal{R}_{S\cap U} ; \qquad \mathcal{L}_Z = \mathcal{R}_{S\cap Z}$$

$$\mathcal{L}_{U'} = \mathcal{R}_S \quad ; \qquad \mathcal{L}_{Z'} = \mathcal{R}'_S.$$

Il suffit de démontrer les inclusions $\mathcal{R}_{S\cap U} \subseteq \mathcal{L}_U$ et $\mathcal{R}_S \subseteq \mathcal{L}_{U'}$. Les démonstrations concernant Z et Z' se font de la même manière en appliquant encore la remarque du lemme 11.1 : $zx \in S \Rightarrow z \in U$.

On notera que l'image homomorphe $\bar{U}$ de U est ici un sous-groupe de $\bar{G}^*$ (cf. lemme 9.2).

1°) $\mathcal{R}_{S\cap U} \subseteq \mathcal{L}_U$: nous prouvons que $u, u' \in U$, $x \in D$, $ux \in S$ entraîne $u'x \in S$ dès que $u \equiv u'$ $(\mathcal{R}_{S\cap U})$. D'après (G_2), il existe $u'' \in U$ tel que $uu'' \in S$; on a donc $x \equiv u''$ $(\mathcal{L})$ d'où $u'x \equiv u'u''$ $(\mathcal{L})$. $uu'' \in S \cap U$ entraîne, d'après l'hypothèse, $u'u'' \in S \cap U$ d'où $u'x \in S$.

2°) $\mathcal{R}_S \subseteq \mathcal{L}_{U'}$. Montrer que $u' \equiv u_1'$ $(\mathcal{R}_S) \Rightarrow u' \equiv u_1'$ $(\mathcal{L}_{U'})$ revient à montrer que $x \in D$, $u' \in U'$, $u'x \in S$ entraîne $u_1'x \in S$. U' est un sous-demi-groupe unitaire contenant S et U (théorème 9.2), donc $u'x \in S \subseteq U'$ entraîne $x \in U'$ et d'après $u' \equiv u_1'$ $(\mathcal{R}_S)$, on a $u_1'x \in S$.

On peut alors énoncer, en utilisant les notations des équivalences principales ([12]), le théorème suivant :

THÉORÈME 11.4. – (Second théorème d'isomorphisme). – *Si U est un sous-demi groupe de D vérifiant la condition (G_2), les demi-groupes quotients $U/S \cap U$ et U'/S sont des groupes isomorphes, U' est le plus petit sous-demi-groupe unitaire de D contenant S et U : $U' = \overline{S \cup U}$*

$$U/S \cap U \simeq \overline{S \cup U}/S.$$

THÉORÈME 11.5. – *Si Z est un sous-demi-groupe de D dont la trace U sur $D - W$ vérifie la condition (G_2) les demi-groupes quotients $Z/S \cap Z$ et Z'/S*

sont des groupes avec zéro isomorphes, Z' est la somme du plus petit sous-demi-groupe unitaire de D contenant S et U ($U = Z \cap (D - W)$) et de l'idéal premier W, et on a l'isomorphisme de groupes avec zéro:

$$Z/S \cap Z \simeq Z'/S = (\overline{S \cup U} + Z)/S.$$

REMARQUE. – En prenant pour D un groupe, on retrouve immédiatement, à partir du théorème 11.4, un théorème classique pour les groupes.

12. Demi-groupes admettant un sous-demi-groupe normal unitaire minimum.

Le théorème 10.6 met en évidence une classe importante de demi-groupes: les demi-groupes admettant un sous-demi-groupe normal unitaire minimum. Pour ces demi-groupes, les propriétés suivantes sont valables:

THÉORÈME 12.1. – *Pour qu'un demi groupe D possède un sous-demi-groupe normal unitaire minimum S, il faut et il suffit que l'une des conditions équivalentes suivantes soit satisfaite:*

1°) *L'ensemble $\mathfrak{S}_\emptyset$ des équivalences $\mathfrak{F}$ telles que $D/\mathfrak{F}$ soit un groupe homomorphe à D admet un élément minimum* (*cf.* § 7).

2°) *Les sous-demi-groupes normaux unitaires de D forment un treillis complet modulaire.*

Nous nous servirons par ailleurs de la

PROPRIÉTÉ 12.1 – *Pour qu'un demi-groupe admette un sous-demi-groupe normal unitaire minimum, il faut et il suffit que toute intersection de sous-demi-groupes normaux unitaires soit nette* (ce qui entraîne qu'elle n'est pas vide).

Cette classe de demi-groupes comprend des demi-groupes très généraux et de types à priori très variés.

1°) *Demi-groupes simples sans zéro à idempotents.*

Le résidu W d'un sous-demi-groupe réflectif unitaire d'un demi-groupe D étant un idéal propre de D, tout sous-demi-groupe réflectif unitaire d'un demi-groupe simple dans zéro est net, c'est-à-dire normal unitaire.

Tout sous-demi-groupe réflectif unitaire d'un demi-groupe quelconque contenant les idempotents non contenus dans son résidu, et toute intersection de sous-demi-groupes réflectifs unitaires étant réflective unitaire, on voit finalement qu'un demi-groupe simple sans zéro à idempotents admet un sous-demi-groupe normal unitaire minimum: le sous-demi-groupe réflectif unitaire $\bar{E}$ engendré par l'ensemble E des idempotents.

Remarque. – Ce résultat s'applique en particulier aux demi-groupes complètement simples sans zéro ([19]).

Remarque. – Un demi-groupe simple avec zéro admettant des diviseurs de zéro possède un seul sous-demi-groupe réflectif unitaire, D lui-même, c'est-à-dire un seul groupe homomorphe : le groupe d'ordre 1.

Ce résultat s'applique en particulier aux demi-groupes complètement simples avec zéro où (0) n'est pas premier.

La propriété du 1° s'étend à certains demi-groupes simples sans idempotents :

2°) *Demi-groupes simples sans idempotent admettant des idéaux d'un côté minimaux.*

Nous supposerons que D, simple sans idempotent, admet des idéaux à droite minimaux. D est alors somme de ses idéaux à droite minimaux, mais ne possède pas d'idéaux à gauche minimaux ([1], [20], [22]).

Soit U l'ensemble des éléments u de D tels qu'il existe $a \in D$ vérifiant $au = a$. U n'est pas vide, car D admet des complexes nets à droite minimaux (cf. propriété 1.2 du chapitre I). Tout sous-demi-groupe réflectif unitaire S de D est normal unitaire (voir 1°) et contient U.

Car, si $u \in U$, il existe $a \in D$ tel que $au = a$; comme S est normal unitaire, il existe $t \in D$ et $s \in S$ tels que $ta = s$ d'où $tau = ta$ ou $su = s$, et comme S est unitaire, $u \in S$.

Donc D admet un sous-demi-groupe normal unitaire minimum : le sous-demi-groupe réflectif unitaire $\bar{U}$ engendré par l'ensemble U.

3°) *Demi-groupes inversés et rectangulaires.* ([31]).

Un demi-groupe inversé est un demi-groupe D dans lequel : $\forall x \in D$, $\exists x' \in D$ tel que xx' ou $x'x$ soit idempotent. Un demi-groupe rectangulaire est un demi-groupe dans lequel tous les éléments sont forts. On sait que :

Théorème 12.2. – *Un demi-groupe inversé et rectangulaire ne possède pas d'idéaux premiers propres* ([31]).

Il résulte alors de ce théorème que le raisonnement et les conclusions de 1° sont valables. En particulier :

Théorème 12.3. – *Dans un demi-groupe D, inversé, rectangulaire et globalement idempotent ($D^2 = D$) le sous-demi-groupe normal unitaire minimum est l'ensemble des idempotents : $\bar{E} = E$.*

Il suffit de montrer que l'ensemble E des idempotents est un sous-demi-groupe réflectif unitaire.

Rappelons qu'on a $\forall a, b \in D$ et $\forall e \in E$, $aeb = ab$ [(31)]. On en déduit immédiatement que E est un sous-demi-groupe. E est réflectif : soit $xy = e \in E$.

On a $yxyx = yex = yx$ donc $yx \in E$. E est unitaire: soit $x \in D = D^2$ et e, $e' \in E$ tels que $ex = e'$. Posons $x = ab$, a, $b \in D$. De $eab = e'$ on déduit $beab = bab = be'$ puis $baba = be'a = ba$ d'où $ba \in E$ et $ab \in E$ puisque E est réflectif.

REMARQUE. - On sait ([31]) qu'un demi-groupe inversé rect ngulaire globalement idempotent est isomorphe au produit de E par un groupe G: $D \simeq D' = G \times E$ avec $G = eDe$, $\forall e \in E$. On démontre facilement que G est isomorphe au groupe quotient de D par E. C'est, à un isomorphisme près, le groupe maximum homomorphe à D.

4°) *Demi-groupes de Vagner* ([34]) *ou «inverse semigroups» de Preston* ([18]). - Un tel demi-groupe D est caractérisé par les deux propriétés suivantes:

a. $\forall a \in E$, $\exists e$, $x \in D$ tels que $ea = a$, $ax = e$;

b. Les idempotents de D sont permutables.

On démontre alors qu'à tout élément $a \in D$ sont associés, de manière unique, deux idempotents e et f, respectivement éléments neutres à gauche et à droite pour a, et un élément a^{-1} (inverse de a) tels que:

$$ea = a = af, \quad aa^{-1} = e, \quad a^{-1}a = f, \quad fa^{-1} = a^{-1} = a^{-1}e.$$

On démontre encore que l'inverse de a^{-1} est a, son élément neutre à gauche f, son élément neutre à droite e et que $(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$.

On remarque que, dans un tel demi-groupe, l'ensemble E des idempotents est net. Donc ce demi-groupe admet un sous-demi-groupe normal unitaire minimum, qui est le sous-demi-groupe réflectif unitaire engendré par E, ensemble des idempotents.

5°) *Demi-groupes admettant des complexès nets d'un côté minimaux.*

Nous appliquons ici le corollaire 8.1 de ce chapitre: un idéal I d'un demi groupe D et D lui-même admettent les mêmes groupes homomorphes, et le théorème 3.16 du chapitre I: pour qu'un demi-groupe admette des complexes nets d'un côté minimaux, il est nécessaire et suffisant que D admette un idéal bilatère simple N, N étant somme de ses propres idéaux de ce côté minimaux. Nous avons vu au 2° qu'un demi-groupe somme de ses idéaux d'un côté minimaux admet un sous-demi-groupe normal unitaire minimum. D'où:

THÉORÈME 12.4. - *Tout demi-groupe possédant des complexes nets d'un côté minimaux, ou, ce qui est équivalent, des idéaux d'un côté minimaux, admet un groupe homomorphe maximum.*

---

(4) Plus exactement, l'ensemble $G_{\emptyset}$ défini page 52 admet un élément maximum.

Nous obtenons ainsi un résultat qui confirme l'intérêt des généralisations de la notion d'homogroupe étudiées au chapitre I.

G. THIERRIN est d'ailleurs arrivé directement (et antérieurement à nous) à ce résultat ([32]) en considérant la plus petite équivalence régulière et simplifiable d'un demi-groupe D, quand D admet des idéaux minimaux d'un côté. C'est ce point de vue qui nous a amenés à chercher une caractérisation précise de la plus petite équivalence régulière et simplifiable d'un demi-groupe quelconque, et plus généralement, de la plus petite équivalence simplifiable d'un demi-groupe. Cette caractérisation fait l'objet du chapitre suivant.

REMARQUE. – Le théorème 12.4 s'applique en particulier aux demi-groupes finis.

6°) *Demi-groupes avec torsion.* – Un demi-groupe avec torsion est un demi-groupe D dans lequel tout élément engendre un sous-demi-groupe cyclique fini.

Il résulte alors d'un théorème de REES [19] que D possède des idempotents et de la définition précédente que l'ensemble U de ces idempotents est net.

D'après le théorème 12.1, D admet un sous-demi-groupe normal unitaire minimum : le sous-demi-groupe réflectif unitaire engendré par U. On retrouve ainsi par une autre voie un résultat de *G.* THIERRIN [32].

CHAPITRE III.

Sur certaines équivalences simplifiables d'un demi-groupe.

Introduction. – L'étude de certains demi-groupes admettant un plus grand groupe homomorphe, et ses rapports avec l'existence d'nn plus grand semi-groupe homomorphe à un demi-groupe quelconque (cf. [32] et fin du § 12 de ce travail) m'ont amené à m'intéresser à la construction de la plus petite équivalence régulière et simplifiable dans un demi-groupe non commutatif (le cas abélien étant très simple).

Ce faisant, il m'est apparu que, parmi les équivalences susceptibles d'être définies dans un demi-groupe, celles qui sont régulières, ou régulières et simplifiables ont surtout retenu l'attention.

Le maniement des équivalences simplifiables est d'ailleurs *a priori* plus délicat que celui des équivalences régulières, la « division » d'un élément par un autre étant en général impossible. En outre, lorsqu'elle est possible. le résultat est un complexe, alors que le produit de deux éléments est un élément.

Une autre source de difficultés est aussi que l'égalité, équivalence minimum dans le treillis des équivalences, est régulière, mais n'est pas en général

simplifiable. Elle ne l'est que dans les semi-groupes; ce fait m'a conduit à m'intéresser en particulier à une classe de demi-groupes qui généralise celle des semigroupes: les demi-groupes stationnaires [29] [31].

Il m'a aussi montré l'intérêt d'avoir une construction de la plus fine équivalence simplifiable pour un demi-groupe quelconque. Le procédé utilisé consiste à définir par récurrence une suite croissante de relations dont on prend la réunion [11]. Ce procédé s'est révélé assez fécond, puiscu'il s'applique également à la construction de la plus fine équivalence régulière et simplifiable, ainsi qu'à celle de la plus fine équivalence simplifiable - ou régulière et simplifiable - pour laquelle les complexes d'une famille donnée sont indivisibles (cf. [21], [28]).

Le dernier paragraphe de ce chapitre illustre l'intérêt de la caractérisation de la plus fine équivalence simplifiable d'un côté (dans un cas particulier où la suite qui la définit se réduit à ses deux premiers termes): les demi-groupes stationnaires y sont reliés aux demi-groupes inversés et rectangulaires par une propriété des équivalences simplifiables comme les semigroupes sont reliés aux groupes [30] [31].

13. Plus fine équivalence simplifiable d'un côté dans un demi-groupe.

Soit D un demi-groupe. Une relation R définie dans D est simplifiable à droite, par exemple, si $a, b, x \in D$, $axRbx$ entraîne aRb.

Soit $\mathcal{E}_d$ l'ensemble des équivalences simplifiable à droite de D, ordonné par la relation usuelle: $R \subseteq R' \leftrightarrow (aRb \rightarrow aR'b)$. Dans le treillis complet $\mathcal{T}$ des équivalences de D, $\mathcal{E}_d$ est une famille de MOORE ([12]): toute intersection d'équivalences simplifiables à droite est simplifiable à droite et l'équivalence universelle est simplifiable à droite. Nous construisons l'équivalence simplifiable à droite minimum σ_d, intersection de toutes les équivalences simplifiables à droite de D.

Comme nous ne supposons pas à priori que D possède un élément neutre, nous posons: $D^* = D \cup \{e\}$, avec: $\forall x \in D^*$, $ex = xe = x$ (si D possède un élément neutre u, nous prendrons $e = u$ d'où $D^* = D$).

L'introduction de D^* simplifie certaines définitions. Il faudra prendre garde, cependant, que ces définitions font intervenir soit des éléments de D seulement, soit ceux de D^*.

1. L'égalité dans D est une équivalence régulière que nous noterons σ_1.

2. La relation σ_2, définie par: $a, b \in D$, $a\sigma_2 b \leftrightarrow \exists x \in D^*$ tel que $ax\sigma_1 bx$ est une relation, définie dans D, réflexive, symétrique, simplifiable à droite et régulière à gauche dans D. [32].

Si ρ est une relation réflexive et simplifiable à droite de D, on a $\sigma_2 \subseteq \rho$. Donc lorsque σ_2 est transitive, on a $\sigma_2 = \sigma_d$, équivalence simplifiable à droite minimum de D.

En particulier, σ_2 est transitive dans les trois cas suivants:

a) dans un demi-groupe commutatif: il est alors immédiat que σ_2 est la plus fine équivalence régulière et simplifiable de D; D/σ_2 est le plus grand semi-groupe homomorphe à D.

b) dans un demi-groupe stationnaire à gauche. Un demi groupe D est stationnaire à gauche si: $\exists x_1 \in D$ tel que $ax_1 = bx_1$ entraîne $\forall x \in D$, $ax = bx$. Notons qu'alors σ_2 est régulière et que c'est la plus fine équivalence régulière, simplifiable à droite, de D.

c) dans un demi-groupe réversible à gauche [12] c'est-à dire tel que deux éléments quelconques aient un multiple commun à droite. Car $ax = bx$ et $by = cy$ entraînent, puisqu'il existe m, $n \in D$ tels que $xm = yn$; $a(xm) = bxm = byn = c(yn)$. (On peut toujours supposer x et y différents de e).

3. Dans le cas général, nous construisons par récurrence, à partir de σ_1, une suite croissante (S) de relations σ_i, définies dans D,

$$(S) \qquad \sigma_1 \subseteq \sigma_2 \subseteq \ldots \subseteq \sigma_{2p-1} \subseteq \sigma_{2p} \subseteq \sigma_{2p+1} \subseteq \ldots \qquad (p = 1, 2, \ldots)$$

réflexives, symétriques et régulières à gauche, celles d'indice pair étant simplifiables à droite, celles d'indice impair étant transitives, chaque relation étant contenue dans toute équivalence simplifiable à droite.

Pour cela, les relations σ_i étant supposées définies juscu'à $i = 2p - 1$ ($p \geq 1$) avec les propriétés précédentes, nous définissons:

σ_{2p} par $a, b \in D$, $a\sigma_{2p}b \leftrightarrow \exists x \in D^*$ tel que $ax\sigma_{2p-1}bx$

σ_{2p+1} comme fermeture transitive de σ_{2p}.

Nous avons immédiatement $\sigma_{2p-1} \subseteq \sigma_{2p} \subseteq \sigma_{2p+1}$ (si $a\sigma_{2p-1}b$, on a $ae\sigma_{2p-1}be$) σ_{2p} est réflexive et régulière à gauche, puisque σ_{2p-1} l'est; elle est évidemment symétrique et simplifiable à droite.

Si ρ_1 est une équivalence simplifiable à droite de D, on a $\sigma_{2p} \subseteq \rho_1$. Car $a, b \in D$, $a\sigma_{2p}b$, entraîne, soit $ae\sigma_{2p-1}be$, ou $a\sigma_{2p-1}b$, avec $\sigma_{2p-1} \subseteq \rho_1$ donc $a\rho_1 b$, soit $ax\sigma_{2p-1}bx$ ($x \in D$) d'où $ax\rho_1 bx$ et comme ρ_1 est simplifiable à droite dans D, $a\rho_1 b$.

σ_{2p+1} est une équivalence régulière à gauche, comme fermeture transitive d'une relation réflexive, symétrique et régulière à gauche. Si ρ_1 est une équivalence simplifiable à droite dans D, on a $\sigma_{2p+1} \subseteq \rho_1$; car $a, b \in D$, $a\sigma_{2p+1}b$ entraîne l'existence de $m_1, m_2, \ldots, m_n \in D$ tels que $a\sigma_{2p}m_1$, $m_1\sigma_{2p}m_2, \ldots, m_n\sigma_{2p}b$ c'est-à-dire $a\rho_1 b$ puisque $\sigma_{2p} \subseteq \rho_1$ et que ρ_1 est transitive.

Dans cette démonstration, les propriétés d'une relation dépendent seulement de celles de la relation immédiatement inférieure, ce qui explique qu'on puisse construire la suite à partir de σ_1 seulement.

4. Enfin, nous définissons une relation σ_d dans D par:
$a, b \in D$, $a\sigma_d b \leftrightarrow \exists n$, entier naturel ≥ 1 tel que $a\sigma_n b$, $\sigma_n \in (S)$, c'est-à-dire $\sigma_d = \bigcup_{i=1}^{\infty} \sigma_i$. La relation σ_d est l'équivalence simplifiable à droite minimum de D. La réflexivité et la symétrie sont immédiates; la transitivité résulte de l'inclusion des relations σ_i et du fait que les σ_{2p+1} sont des équivalences; la simplifiabilité à droite résulte de cette même inclusion et du fait que les σ_{2p} sont simplifiables à droite.

σ_d est la plus petite équivalence simplifiable à droite de D; car si ρ_1 est une équivalence simplifiable à droite de D et si $a, b \in D$, $a\sigma_d b$, il existe n tel que $a\sigma_n b$; de $\sigma_n \subseteq \rho_1$ résulte alors $a\rho_1 b$.
Les relations σ_i étant régulières à gauche, la propriété suivante est immédiate:

THÉORÈME 13.1. - *Dans un demi-groupe, la plus fine équivalence simplifiable d'un côté est régulière de l'autre côté.*

REMARQUE. Si σ_g est la plus fine équivalence simplifiable à gauche de D, la condition;

$$(\sigma^*) \qquad \sigma_d = \sigma_g$$

est une condition suffisante pour que $\sigma_d (= \sigma_g)$ soit la plus fine équivalence régulière et simplifiable de D.

Dans [32], G. THIERRIN a indiqué une classe très large de demi-groupes possédant cette propriété (demi-groupes abéliens, homogroupes). Ces demi-groupes vérifient la condition

$$(\sigma) \qquad \exists x \in D \; ax = bx \leftrightarrow \exists x_1 \in D \; x_1 a = x_1 b$$

Dans ce cas, σ_2 est transitif et égal à $\sigma_d (= \sigma_g)$.

Le théorème X de [32] s'étend immédiatement aux demi groupes vérifiant la condition σ^*.

THÉORÈME 13.2. - *Pour que les équivalences simplifiables à droite d'un demi groupe D vérifiant la condition* (σ^*) *soient régulières à droite, il faut et il suffit que tout semi-groupe homomorphe à D soit un groupe.*

14. Plus petite équivalence simplifiable d'un demi-groupe.

Nous construisons l'élément nul τ du treillis complet $\mathfrak{S}$ des équivalences simplifiables définies dans un demi-groupe D non commutatif. Rappelons que,

dans le cas commutatif, on a $\tau = \sigma_2$, définie par $a,\ b \in D$, $a\sigma_2 b$ si et seulement s'il existe $x \in D$(ou D^*) tel que $ax = bx$, équivalence qui est aussi, dans ce cas, la plus petite équivalence régulière et simplifiable de D.

D^* étant défini comme au § 13, on construit par récurrence une suite croissante (T) de relations τ_i réflexives et symétriques, celles d'indice pair étant simplifiables, celles d'indice impair étant transitives, chaque relation étant contenue dans toute équivalence simplifiable.

1. τ_1 étant l'égalité, τ_2 est définie par la condition $a,\ b \in D$, $a\tau_2 b$ si et seulement s'il existe $x,\ y \in D^*$ tels que $xay\tau_1 xby$.

τ_2 est réflexive, symétrique et simplifiable. Si ρ est une relation réflexive et simplifiable de D, on a $\tau_2 \subseteq \rho$ car $a,\ b \in D$, $a\tau_2 b \leftrightarrow \exists x,\ y \in D^*$, $xay = xby \rightarrow xay \equiv xby(\rho) \rightarrow a \equiv b(\rho)$, la démonstration restant valable si x ou y est égal à e. Lorsque τ_2 est transitive, c'est l'équivalence simplifiable minimum de D.

En particulier, τ_2 est transitive dans les deux cas particuliers suivants:

a) dans un demi-groupe stationnaire (c'est à-dire stationnaire à gauche et à droite). Car $a,\ b,\ c, \in D$, $x,\ y,\ x',\ y' \in D^*$ $xay = xby$, $x'by = x'cy'$ entraînent $xay' = xby'$ (encore vrai si $x = e$) et $x'ay' = x'by' = x'cy'$.
τ_2 est régulière car $a,\ b \in D$, $x,\ y \in D^*$, $xay = xby$ entraîne par exemple, pour tout $r \in D^*$, $xray = xrby$.
τ_2 est donc, pour un demi-groupe stationnaire, la plus fine équivalence régulière et simplifiable.

b) dans un demi-groupe réversible.
S'il existe $x,\ y,\ x',\ y' \in D^*$ tels que $a,\ b,\ c \in D$ et $xay = xby$, $x'by' = x'cy'$, on peut toujours supposer, en multipliant à gauche ou à droite par un élément quelconque de D, $x,\ y,\ x',\ y'$ différents de e. Il existe alors, par hypothèse, $m,\ n,\ m',\ n' \in D$ tels que $ym = y'n$, $m'x = n'x'$, d'où: $xaym = xbym$ et

$$(m'x)a(ym) = (m'x)b(ym) = (n'x')b(y'n) = (n'x')c(y'n)$$

2. Dans le cas général, à partir de τ_1, nous construisons la suite (T) par récurrence; si nous supposons les τ_i définis jusqu'à $i = 2p - 1 (p \geq 1)$ avec les propriétés citées plus haut, nous définissons:

τ_{2p} par $a,\ b \in D$, $a\tau_{2p} b \leftrightarrow \exists x,\ y \in D^*$ tel que $xay\tau_{2p-1} xby$

τ_{2p+1} comme fermeture transitive de τ_{2p}.

On a évidemment $\tau_{2p-1} \subseteq \tau_{2p} \subseteq \tau_{2p+1}$; τ_{2p} est réflexive et simplifiable dans D. τ_{2p+1} est une équivalence dans D. Si ρ_1 est une équivalence simplifiable de D, on démontre comme au paragraphe 13 les inclusions $\tau_{2p} \subseteq \tau_{2p+1} \subseteq \rho_1$.

4. Si l'on définit la relation τ comme réunion des τ_i : $\tau = \bigcup_{i=1}^{\infty} \tau_i$, τ est la plus fine équivalence simplifiable de D. Cette équivalence n'est pas régulière a priori.

15. Plus petite équivalence régulière et simplifiable de D.

Nous construisons maintenant l'équivalence régulière et simplifiable minimum Σ^*, définie dans D, intersection de toutes les équivalences régulières et simplifiables de D; le demi-groupe quotient $S^* = D/\Sigma^*$ est alors le plus grand semi-groupe homomorphe à D, et tout semi-groupe homomorphe à D est homomorphe à S^* [32].

Le procédé de construction employé est encore le même qu'aux paragraphes précédents: nous définissons par récurrence une suite croissante de relations dont nous prenons la réunion.

Cette étude concerne essentiellement le cas non commutatif. Dans le cas commutatif, nous avons déjà souligné que Σ^* était l'équivalence définie par: $a, b \in D$, $a\Sigma^* b$ si et seulement s'il existe $x \in D$ tel que $ax = bx$.

1. L'égalité, plus fine équivalence régulière de D, est ici notée ω_1.

2. Nous construisons par récurrence une suite croissante (0) de relations ω_i, réflexives, symétriques et régulières,

$$(0) \qquad \omega_1 \subseteq \omega_2 \subseteq \ldots \subseteq \omega_{2p-1} \subseteq \omega_{2p} \subseteq \omega_{2p+1} \subseteq \ldots$$

telles que chacune de ces relations soit contenue dans toute équivalence régulière et simplifiable de D, celles d'indice impair étant des équivalences.

Les relations ω_i (i entier naturel ≥ 1) étant supposées définies jusqu'à $i = 2p-1$ ($p \geq 1$) avec les propriétés précédentes, nous définissons ω_{2p} de la manière suivante:

$a, b \in D$, $a\omega_{2p} b$ si et seulement s'il existe $a', b' \in D$, $x, y, u, v \in D^*$ tels que $a = ua'v$, $b = ub'v$, $uxa'yv\omega_{2p-1}uxb'yv$.

La relation ω_{2p+1} est définie comme fermeture transitive de ω_{2p}.

La symétrie de ω_{2p} est immédiate. Si $a, b \in D$ et $a\omega_{2p-1}b$, en posant $a = eae$, $b = ebe$, on a $e.e.a.e.e = e.e.b.e.e$, c'est-à-dire $a\omega_{2p}b$ d'où $\omega_{2p-1} \subseteq \omega_{2p}$. La réflexivité de ω_{2p} résulte alors de celle de ω_{2p-1}.

Le relation ω_{2p} est régulière: démontrons par exemple la régularité à gauche.

Supposons que $a, b \in D$, $a\omega_{2p}b$; il existe $a', b' \in D$, $x, y, u, v \in D^*$ tels que

$$a = ua'v,\ b = ub'v,\ uxa'yv\omega_{2p-1}uxb'yv$$

ω_{2p-1} étant régulière dans D, pour tout $r \in D$, on a :

$$ra = (ru)a'v,\ rb = (ru)b'v\ (ru)xa'yv\omega_{2p-1}(ru)xb'yv$$

ce qui prouve que les éléments ra et rb vérifient la relation ω_{2p}.

Si Σ est une équivalence régulière et simplifiable de D, montrons que $\omega_{2p} \subseteq \Sigma$. Soient $a, b \in D$ tels que $a\omega_{2p}b$; avec les notations précédentes, supposons d'abord u et v différents de e; alors $u, v \in D$. De $uxa'yv\omega_{2p-1}uxb'yv$ et $\omega_{2p-1} \subseteq \Sigma$ on déduit $uxa'yv\,\Sigma\,uxb'yv$; que x et y soient ou non différents de e, et Σ étant simplifiable dans D, on a $a'\,\Sigma\,b'$; Σ étant régulière dans D, on a aussi $ua'v\,\Sigma\,ub'v$, c'est-à-dire finalement $a\,\Sigma\,b$.

Si par exemple $u = e$, on a $a = a'v$, $b = b'v$, $xa'yv\omega_{2p-1}xb'yv$ et la démonstration précédente s'adapte sans difficulté.

La fermeture transitive de ω_{2p} est une équivalence régulière, puisque ω_{2p} est une relation réflexive, symétrique et régulière. On a évidemment $\omega_{2p-1} \subseteq \omega_{2p} \subseteq \omega_{2p+1}$. Si Σ est une équivalence régulière et simplifiable de D, on a $\omega_{2p+1} \subseteq \Sigma$. Car $a, b \in D$, $a\omega_{2p+1}b$ entraîne $a\omega_{2p}m_1$, $m_1\omega_{2p}m_2, \ldots, m_n\omega_{2p}b$ ($m_i \in D$) et comme $\omega_{2p} \subseteq \Sigma$ et que Σ est transitive, il en résulte aussitôt $a\,\Sigma\,b$. Les relations ω_{2p} et ω_{2p+1} ont donc bien les propriétés annoncées au début du point 2.

3. Enfin, nous définissons la relation Σ^* en prenant la réunion des relations ω_i : $\Sigma^* = \bigcup_{i=1}^{\infty} \omega_i$. Σ^* est la plus fine équivalence régulière et simplifiable de D. La réflexivité et la symétrie sont immédiates; la transitivité et la régularité résultent du fait que les ω_i forment une chaîne et que les ω_{2p+1} sont des équivalences régulières.

Σ^* est simplifiable dans D : si $a, b, t \in D$ sont tels que, par exemple, on ait $at\,\Sigma^*\,bt$, il existe un entier p tel que $at\omega_{2p-1}bt$; comme ω_{2p-1} est régulière dans D, pour un élément quelconque x de D on a : $xat\omega_{2p-1}xbt$ d'où, en posant $a = eae$, $b = ebe$, $exate\ \omega_{2p-1}exbte$, c'est-à-dire $a\omega_{2p}b$ et par conséquent $a\,\Sigma^*\,b$. Que Σ^* soit la plus fine équivalence régulière et simplifiable de D est la conséquence immédiate de ce que chaque ω_i est contenue dans toute équivalence régulière et simplifiable de D.

REMARQUE. - Si D est un demi-groupe stationnaire, la suite (0) se réduit à ses deux premiers termes (cf. § 14).

16. Plus fine équivalence simplifiable à droite pour laquelle chaque complexe H_ι d'une famille $\mathfrak{F} = \{H_\iota\}_{\iota \in I}$ de complexes de D est indivisible.

Dans [28], M. TEISSIER a déterminé de manière simple la plus fine équivalence régulière d'un demi-groupe D pour laquelle nn complexe H de D est indivisible. La solution du problème analogue, pour les équivalences simplifiables, ou régulières et simplifiables, n'est pas aussi simple, pour la raison que la plus fine équivalence simplifiable de D n'est pas aussi simplement définie que la plus fine équivalence régulière, qui est l'égalité.

La solution que nous proposons ici est encore fondée sur le procédé des paragraphes précédents: construction d'une suite croissante de relations dont on prend la réunion. Suivant une suggestion de R. CROISOT, nous avons traité le problème pour les complexes d'une famille $\mathfrak{F} = \{H_\iota\}_{\iota \in I}$ de complexes de D.

L'ensemble Λ_d des équivalences $\mathfrak{L}_\mathfrak{F}$ de D, simplifiables à droite, pour lesquelles chaque complexe H_ι d'une famille $\mathfrak{F} = \{H_\iota\}_{\iota \in I}$ ($\forall \iota \in I$, $H_\iota \neq \emptyset$) est indivisible, n'est pas vide: l'équivalence universelle appartient à Λ_d; Λ_d est d'ailleurs, dans le treillis $\mathfrak{T}$ des équivalences de D, une famille de MOORE. Nous construisons l'élément nul λ_d de Λ_d.

On pose encore $D^* = D \cup \{e\}$ avec: $\forall x \in D^*$, $ex = xe = x$ ($e = u$ si D possède un élément neutre u).

1. λ_1 est la relation définie dans D de la manière suivante:

$a, b \in D$, $a \lambda_1 b$ si et seulement s'il existe $x \in D^*$ tel que $ax = bx$

ou s'il existe $\iota \in I$ et $x \in D^*$ tels que $ax \in H_\iota$ et $bx \in H_\iota$ (c'est-à-dire $a, b \in H_\iota \cdot x$ ou encore $H_\iota \cdot a)(H \cdot b$.

λ_1 est réflexive, symétrique et simplifiable à droite dans D.

Si $\mathfrak{L}_\mathfrak{F}$ est une équivalence simplifiable à droite, définie dans D, et dans laquelle chaque H_ι est indivisible, on a $\lambda_1 \subseteq \mathfrak{L}_\mathfrak{F}$.

Soit en effet $a, b \in D$, $a \lambda_1 b$; s'il existe $x \in D^*$ tel que $ax = bx$, ou bien $x = e$, $a = b$ et $a \mathfrak{L}_\mathfrak{F} b$; ou bien $x \in D$, $ax \mathfrak{L}_\mathfrak{F} bx$ et $a \mathfrak{L}_\mathfrak{F} b$ puisque $\mathfrak{L}_\mathfrak{F}$ est simplifiable à droite.

S'il existe $\iota \in I$ et $x \in D^*$ tel que ax et $bx \in H_\iota$, on a $a, b \in H_\iota$ ou $ax, bx \in H_\iota$ avec $x \in D$.

Dans les deux cas, les hypothèses: H_ι indivisible modulo $\mathfrak{L}_\mathfrak{F}$ pour tout $\iota \in I$, $\mathfrak{L}_\mathfrak{F}$ simplifiable à droite, entraînent $a \mathfrak{L}_\mathfrak{F} b$.

2. Nous construisons par récurrence, à partir de λ_1, une suite croissante de relations λ_i, définies dans D:

$$\text{(L)} \qquad \lambda_1 \subseteq \lambda_2 \subseteq \ldots \lambda_{2p-1} \subseteq \lambda_{2p} \subseteq \lambda_{2p+1} \subseteq \ldots \qquad (p = 1, 2\ldots)$$

réflexives, symétriques, celles d'indice impair étant simplifiables à droite,

celles d'indice pair étant transitives et chaque relation étant contenue dans toute équivalence simplifiable à droite pour laquelle chaque H_ι est indivisible.

Supposant définies les λ_i jusqu'à $i = 2p - 1 (p \geq 1)$ avec les propriétés précédentes, on définit λ_{2p} comme fermeture transitive de λ_{2p-1} et λ_{2p+1} par la condition : $a, b \in D$, $a\lambda_{2p+1}b$ si et seulement s'il existe $x \in D^*$ tel que $ax\lambda_{2p}bx$. λ_{2p} est évidemment une équivalence contenant λ_{2p-1} ; si $\mathfrak{L}_\mathfrak{F}$ est une équivalence simplifiable à droite pour laquelle chaque H_ι est indivisible, on a : $\lambda_{2p} \subseteq \mathfrak{L}_\mathfrak{F}$.

En effet, soit $a, b \in D$, $a\lambda_{2p}b$; il existe $m_1, m_2, \ldots, m_n \in D$ tels que $a\lambda_{2p-1}m_1$, $m_1\lambda_{2p-1}m_2, \ldots, m_n\lambda_{2p-1}b$. De l'inclusion $\lambda_{2p-1} \subseteq \mathfrak{L}_\mathfrak{F}$ et de la transitivité de $\mathfrak{L}_\mathfrak{F}$ on déduit alors $a\mathfrak{L}_\mathfrak{F}b$.

λ_{2p+1} est évidemment symétrique et simplifiable à droite ; on a : $\lambda_{2p} \subseteq \lambda_{2p+1}$ car $a\lambda_{2p}b$ équivaut à $ae\lambda_{2p}be$. Il en résulte que λ_{2p+1} est réflexive.

Si $\mathfrak{L}_\mathfrak{F}$ est une équivalence simplifiable à droite pour laquelle chaque H_ι est indivisible, on $a\ \lambda_{2p+1} \subseteq \mathfrak{L}_\mathfrak{F}$.

Car $a, b \in D$, $a\lambda_{2p+1}b \Rightarrow \exists x \in D^*$ tel que $ax\lambda_{2p}bx$. Si $x = e$, $a\lambda_{2p}b$ avec $\lambda_{2p} \subseteq \mathfrak{L}_\mathfrak{F}$, entraîne $a\mathfrak{L}_\mathfrak{F}b$; si $x \in D$, on $a\ ax\mathfrak{L}_\mathfrak{F}bx$ d'où $a\mathfrak{L}_\mathfrak{F}b$ puisque $\mathfrak{L}_\mathfrak{F}$ est simplifiable à droite dans D.

3. La relation $\lambda_d = \bigcup_{i=1}^{\infty} \lambda_i$ est la plus fine équivalence simplifiable à droite de D pour laquelle chaque H_ι soit indivisible.

Que λ_d soit une équivalence simplifiable à droite est immédiat. Chaque H_ι est indivisible modulo λ_d, car $a, b \in H_\iota$ entraîne $ae = a$, $be = b \in H_\iota$ c'est-à-dire $a\lambda_1 b$ d'où $a\lambda_d b$.

Que λ_d soit la plus fine des équivalences $\mathfrak{L}_\mathfrak{F}$ résulte du fait que chaque λ_i est contenue dans toute $\mathfrak{L}_\mathfrak{F}$.

Si $\mathfrak{L}$ est une équivalence simplifiable à droite contenant λ_d, $\mathfrak{L}$ est une équivalence $\mathfrak{L}_\mathfrak{F}$, car chaque H_ι, indivisible modulo λ_d, l'est modulo $\mathfrak{L}$. Les équivalences $\mathfrak{L}_\mathfrak{F}$ sont donc toutes les équivalences simplifiables à droite qui contiennent λ_d.

17. Plus fine équivalence simplifiable pour laquelle chaque complexe d'une famille est indivisible.

Nous construisons de la même façon l'élément nul μ du treillis $\mathfrak{M}$ des équivalences simplifiables $\mathfrak{M}_\mathfrak{F}$ de D pour lesquelles chaque complexe H_ι d'une famille $\mathfrak{F} = \{H_\iota\}_{\iota \in I}$ de complexes de D est indivisible.

La suite (μ_i) dont la réunion μ est l'équivalence cherchée sera définie comme suit :

1. Pour $a, b \in D$, on a : $a\mu_1 b$ si et seulement s'il existe $x, y \in D^*$ tels que $xay = xby$ ou s'il existe $\iota \in I$ et $x \in D^*$ tels que xay et $xby \in H_\iota$.

2. Les μ_i étant définis jusqu'à $i = 2p - 1$ avec les propriétés requises (suite croissante, chaque μ_i est contenue dans toute équivalence simplifiable

pour laquelle chaque H_ι est indivisible, μ_i est réflexive, symétrique et simplifiable pour i impair, et transitive pour i pair), μ_{2p} est définie comme fermeture transitive de μ_{2p-1}, et μ_{2p+1} par la condition: a, $b \in D$, $a\mu_{2p+1}b$ si et seulement s'il existe x, $y \in D^*$ tels que $xay\mu_{2p}xby$.

3. $\mu = \bigcup_{i=1}^{\infty} \mu_i$ est la plus fine équivalence simplifiable de D pour laquelle chaque H_ι est indivisible et les équivalences $\mathfrak{M}_\mathfrak{F}$ sont les équivalences simplifiables de D qui contiennent μ.

18. **Plus fine équivalence régulière et simplifiable pour laquelle chaque complexe d'une famille est indivisible.**

Si ν est l'élément nul du treillis $\mathfrak{N}$ des équivalences régulières et simplifiables pour lesquelles chaque complexe H_ι d'une famille $\mathfrak{F}$ de complexe est indivisible, D/ν est le plus grand semi-groupe homomorphe à D dans lequel l'image de chaque H_ι soit formée d'un seul élément. La méthode est toujours la même: on définit par récurrence une suite croissante de relations ν_i, réflexives, symétriques et régulières; chacune de ces relations étant contenue dans toute équivalence régulière et simplifiable pour laquelle chaque H_ι est indivisible, celles d'indice pair étant transitives.

1. On prend pour ν_1 la relation définie par les conditions suivantes:

a, $b \in D$, $a\nu_1 b$ si et seulement s'il existe a', $b' \in D$, u, v, x, $y \in D^*$ tels que $a = ua'v$, $b = ub'v$ et $uxa'yv = uxb'yv$ ou s'il existe a', $b' \in D$, u, v, x, y, z, $t \in D^*$ et $\iota \in I$ tels que $a = ua'v$; $b = ub'v$ et $uxa'yv \in zH_\iota t$, $uxb'yv \in zH_\iota t$.

ν_1 est réflexive (prendre $u = v = x = y = e$) et symétrique; ν_1 est régulière; démontrons par exemple la régularité à gauche.

Soit a, $b \in D$, $a\nu_1 b$; si on a $uxa'yv = uxb'yv$ avec $a = ua'v$, $b = ub'v$ on a aussi $(ru)xa'yv = (ru)xb'yv$ avec $ra = (ru)a'v$, $rb = (ru)b'v$, c'est-à-dire $ra\nu_1 rb$.

Si $uxa'yv$ et $uxb'yv \in zH_\iota t$ $(ru)xa'yv$ et $(ru)xb'yv \in (rz)H_\iota t$ et on a encore $ra\nu_1 rb$.

Si $\mathfrak{M}_\mathfrak{F}$ est une équivalence régulière et simplifiable de D pour laquelle chaque H_ι est indivisible, on a: $\nu_1 \subseteq \mathfrak{M}_\mathfrak{F}$. Car si $uxa'yv = uxb'yv$, on a $a'\mathfrak{M}_\mathfrak{F}b'$ puisque $\mathfrak{M}_\mathfrak{F}$ est simplifiable daus D, d'où $ua'v\mathfrak{M}_\mathfrak{F}ub'v$ ou $a\mathfrak{M}_\mathfrak{F}b$ puisque $\mathfrak{M}_\mathfrak{F}$ est régulière. La démonstration reste valable si certains des éléments x, y, u, v sont égaux à e. Si $uxa'yv$ et $uxb'yv \in zH_\iota t$, on remarque d'abord que, chaque H_ι étant indivisible modulo l'équivalence régulière $\mathfrak{M}_\mathfrak{F}$, $zH_\iota t$ l'est aussi. Donc $uxa'yv\mathfrak{M}_\mathfrak{F}uxb'yv$ et la démonstration se termine comme ci-dessus.

2. Les relations ν_i étant snpposées définies jusqu'à $i = 2p-1 (p \geq 1)$ avec les propriétés requises, on définit ν_{2p} comme fermeture transitive de ν_{2p-1}, et ν_{2p+1} par la condition: a, $b \in D$, $a\nu_{2p+1}b$ si et seulement s'il existe a', $b' \in D$, u, v, x, $y \in D^*$ tels que $a = ua'v$, $b = ub'v$ et $uxa'yv\nu_{2p}uxb'yv$.

ν_{2p} est une équivalence régulière contenant la relation réflexive, symétrique et régulière ν_{2p-1} et si $\mathfrak{N}_{\mathcal{F}}$ est une équivalence du treillis $\mathfrak{N}$, $\nu_{2p-1} \subseteq \mathfrak{N}_{\mathcal{F}}$ entraîne $\nu_{2p} \subseteq \mathfrak{N}_{\mathcal{F}}$.

ν_{2p+1} est symétrique et régulière, car ν_{2p} l'est. On a $\nu_{2p} \subseteq \nu_{2p+1}$ (prendre $u = v = x = y = e$) donc ν_{2p+1} est réflexive.

Si $\mathfrak{N}_{\mathcal{F}} \in \mathfrak{N}$, on démontre, par un raisonnement analogue à celui du 1, que $\nu_{2p+1} \subseteq \mathfrak{N}_{\mathcal{F}}$.

3. Si on définit la relation ν comme réunion des ν_i, ν est la plus fine équivalence régulière et simplifiable pour laquelle chaque H_i est indivisible.

Que ν soit une équivalence régulière est immédiat; ν est simplifiable dans D; car si a, b, $t \in D$ et $at\nu bt$, il existe un entier $p \geq 1$ tel que $at\nu_{2p}bt$; comme ν_{2p} est régulière, pour un x quelconque de D, on a $xat\nu_{2p}xbt$; si on écrit $a = eae$, $b = ebe$, $exate\nu_{2p}exbte$, on voit qu'on a: $a\nu_{2p\pm1}b$ c'est-à-dire $a\nu b$. ν est la plus fine équivalence régulière et simplifiable pour laquelle chaque H_i soit indivisible.

H_i est indivisible modulo ν, car a, $b \in H_i \Rightarrow a = eae$, $b = ebe$ et $eeaee$, $eebee$ appartiennent à eH_ie, c'est-à-dire que $a\nu_1 b$ d'où $a\nu b$.

Que ν soit la plus fine résulte enfin du fait que chaque ν_i est contenue dans toute équivalence $\mathfrak{N}_{\mathcal{F}}$.

19. Caractérisation des demi-groupes inversés et rectangulaires par leurs équivalences simplifiables.

J'ai déjà fait remarquer, dans la construction de la plus petite équivalence simplifiable (d'un côté ou bilatère), que les suites (S) et (T) se réduisaient à leurs deux premiers termes lorsque D est stationnaire.

Or, dans le chapitre II de ce travail (§ 12, 3°), j'ai mis en évidence une classe particulière de demi-groupes stationnaires: les demi-groupes inversés et rectangulaires. Ceux-ci possèdent, en ce qui concerne les sous-demi-groupes normax unitaires, des propriétés analogues à celles qu'on a pour les sous-groupes distingués d'un groupe. En particulier, les demi-groupes inversés et rectangulaires globalement idempotents admettent un sous-demi-groupe normal unitaire minimum égal à l'ensemble des idempotents.

Par ailleurs, dans sa thèse [30], G. THIERRIN a donné une caractérisation des groupes au moyen de leurs équivalences simplifiables d'un côté:

THÉORÈME 19.1 (THIERRIN). - *Pour qu'un semi-groupe soit un groupe, il faut et il suffit que ses équivalences simplifiables d'un côté soient régulières du même côté.*

Il m'a paru intéressant de chercher ce que devient cette proposition lorsqu'on remplace l'hypothèse « semi-groupe » par « demi-groupe stationnaire » qui en constitue une généralisation. J'ai obtenu le

THÉORÈME 19.2. - *Pour qu'un demi-groupe stationnaire D soit inversé et rectangulaire, il faut et il suffit que ses équivalvnces simplifiables d'un côté soient régulières du même côté.*

Nous ferons la démonstration pour le cas « à droite ». Rappelons qu'un demi-groupe inversé est un demi-groupe dans lequel: $\forall x \in D$, $\exists x' \in D$ tel que xx' ou $x'x$ soit idempotent; qu'un demi-groupe rectangulaire est un demi-groupe dans lequel tous les éléments sont forts [29] [31].
Que la condition du théorème 18.2 soit nécessaire résulte immédiatement d'un théorème de G. THIERRIN [32].

THÉORÈME 19.3. (THIERRIN) - *Dans un demi-groupe inversé, toute relation réflexive, transitive et simplifiable à droite est régulière à droite.*

Pour démontrer la partie « suffisante », et puisque tout demi-groupe stationnaire est rectangulaire, nous établirons que D est inversé lorsque dans D, toute équivalence simplifiable à droite est régulière à droite.

Observons d'abord que D^2 inversé entraîne D inversé. Car si $x \in D$, $x^2 \in D^2$ et s'il existe $x' \in D$ tel que x^2x' soit idempotent, xx' est alors tel que $x(xx')$ le soit. Donc D est inversé.
Soit $a \in D^2$; nous avons $a = a_1a_2$, a_1, $a_2 \in D$.

Nous considérons l'ensemble V_a des éléments $m \in D$ tels que:

$$x,\ e \in D \text{ tels que } aex = mx$$

V_a est consistant à gauche ([8]); autrement dit, $mn \in V_a$ entraîne $m \in V_a$.

Car si $m \notin V_a$, $\exists x,\ e \in D$ tels que $aex = mx$; or D est stationnaire, donc $aex = mx$ entraîne $aen = mn$ et $a(en)x = mn \cdot x$ ce qui montre que $mn \notin V_a$ contrairement à l'hypothèse.

Nous définissons alors dans D une équivalence E_a de la manière suivante:

1) V_a est une classe.

2) Dans $D - V_a$, nous prenons la restriction de σ_2, plus fine équivalence simplifiable à droite de D, définie par $b,\ c \in D$, $b\sigma_2 c \iff \exists t \in D$ tel que $bt = ct$.

Nous démontrons que E_a est simplifiable à droite dans D (donc, d'après l'hypothèse, régulière à droite). Supposons que $bx \equiv cx\ (E_a)$.

Si bx (et par conséquent cx) appartient à V_a, consistant à gauche, on a $b \in V_a$, $c \in V_a$ donc $b \equiv c\ (E_a)$.

Sinon, par définition, il existe $u \in D$ tel que $bxu = cxu$.

Je dis que b et c appartiennent simultanément, soit à V_a, soit à $D - V_a$ (d'où résulte alors, par définition, $b \equiv c\ (E_a)$).

En effet, si $b \notin V_a$ et $c \in V_a$, il existe e, $t \in D$ tels que $aet = bt$. Mais $bxu = cxu$ entraîne, puisque D est stationnaire, $bt = ct$, d'où $aet = ct$, qui prouve $c \notin V_a$, contrairement à l'hypothèse.

Nous démontrons ensuite que $a \notin V_a$.

Si $a = a_1 a_2 \in V_a$, $a_1 \in V_a$. On a donc $a = a_1 a_2 \equiv a_1\ (E_a)$ E_a est régulière à droite, ainsi qu'on l'a démontré, donc :

$$\forall x,\ y \in D\ axy = a_1 a_2 xy \equiv a_1 xy \qquad (E_a)$$

Mais axy n'appartient pas à V_a, car on a $a(xy)z = axy \cdot z$, donc il existe $t \in D$ tel que $a_1 a_2 xyt = a_1 xyt$.

Finalement, D étant stationnaire, en remplaçant xyt par a_2, on obtient $aa_2 = a$ d'où $aa_2 x = ax$ $(\forall x \in D)$ c'est-à-dire $a \notin V_a$ en contradiction avec l'hypothèse $a \in V_a$.

Il existe donc e, $x \in D$ tels que $aex = ax$.

D étant stationnaire, cette égalité entraîne successivement : $ae^2 = ae$, puis $e^3 = e^2$ et enfin $e^4 = e^3 = e^2$, qui montre que e^2 est un idempotent de D. Nous montrons pour terminer qu'il existe $a' \in D$ tel que aa' soit idempotent.

Si $e \notin V_a$, il existe f, $x \in D$ tels que $afx = ex$, d'où D étant stationnaire, $afe = e^2$; on pourra prendre $a' = fe$.

Si $e \in V_a$, je dis que $e \in V_a^2$; car sinon, il existe f, $x \in D$ tels que $a^2 fx = ex$ ou $a(af)x = ex$ qui prouve que $e \notin V_a$. Si alors, $a \notin V_a^2$, il existe f, $x \in D$ tels que $a^2 fx = ax = a(af)x$ Comme précédemment, on montre que $(af)^2$ est idempotent, et ainsi on peut prendre pour a' l'élément $a' = faf$.

Si $a \in V_a^2$, on a alors : $e \equiv a\ (E_a^2)$. E_a^2 est régulière à droite, donc $ea \equiv a^2\ (E_a^2)$

Mais $a^2 \notin V_a^2$, donc $\exists x \in D$ tel que $eax = a^2 x$ ou $a(ax) = e(ax)$ et, finalement, D étant stationnaire, $ae = e^2$. On pourra prendre dans ce cas $a' = e$. La propriété « toute équivalence de D simplifiable à droite est régulière à droite $\Rightarrow$ D inversé » est ainsi démontrée.

Parmi les généralisations possibles de la notion de demi-groupe, nous avous rencontré également, au cours de nos travaux, celle qu'on obtient en considérant les conditions :

(C_1) $\quad ax = bx \Rightarrow |\ a) = |\ b)$ $\quad$ et $\quad$ (C_2) $\quad xa = xb \Rightarrow (a\ | = (b\ |$

$|\ a)$ étant l'idéal principal à droite engendré par a : $|\ a) = aD \cup \{a\}$.

Un semi-groupe à droite, par exemple, vérifie la condition (C_1). Un semi-groupe, un demi-groupe complètement simple vérifient les deux conditions (C_1) et (C_2).

PROPRIÉTÉ 19.1. - *Tout demi-groupe D inversif à droites et vérifiant la condition (C_2) est réunion de groupes.*

Il suffit de démontrer que D est inversif [6], c'est-à dire que: $\forall a \in D$, $\exists t \in D$ tel que $a = ata$.

D étant inversif à droite, $\forall a \in D$, $\exists u \in D$ tel que $a = a^2u$.
On a $a^2 = a^3u = a^2ua$ d'où $a^2 \cdot au = a^2 \cdot ua$.

D'après la condition (C^2) $(au^2 \mid = (ua \mid$, donc il existe $t \in D$ tel que $au = tua$ d'est-à-dire $a = a^2u = a(tu)a$.

PROPRIÉTÉ 19.2. - *Tout demi-groupe D inversif à droite et vérifiant les conditions (C_1) et (C_2) est complètement simple.*

Il suffit de démontrer que D est simple, c'est-à-dire que $\forall x$, $a \in D$, $\exists u$, $v \in D$ tels que $x = uav$.

D'après la propriété 2.1, D est inversif: $\exists t \in D$ tel que $a = ata$, d'où $xa = xata$, et d'après la condition (C), $\exists t' \in D$ tel que $x = xatt' \in DaD$.
Parmi les demi-groupes inversés et rectangulaires, ceux qui sont globalement idempotents ont déjà retenu notre attention. Nous savons qu'ils sont isomorphes au produit direct d'un groupe et d'un demi-groupe idempotent rectangulaire [31].
Notous que, pour un demi-groupe idempotent, les notions de rectangularité au sens de THÉODOSSIS [29] et au sens de KIMURA [15] sont équivalentes (cf. par ex. le théorème 2 de [31]).

En utilisant le résultat de KIMURA; tout demi-groupe idempotent rectangulaire est isomorphe au produit direct d'un antisemigroupe à droite et d'un antisemigroupe à gauche, on voit que les demi-groupes inversés rectangulaires globalement idempotents sont des demi-groupes complètement simples particuliers: ceux pour lesquels les p_{kj} sont tous égaux à 1. Comme tels, ils vérifient les conditions (C_1) et (C_2).

Nous démontrons la proposition suivante:

THÉORÈME 19.4. - *Pour qu'un demi-groupe stationnaire D vérifiant les conditions (C_1) et (C_2) soit un demi-groupe inversé rectangulaire globalement idempotent, il faut et il suffit que ses équivalences simplifiables d'un côté soient régulières de l'autre côté.*

Que la condition soit nécessaire est immédiat. En tenant compte du théorème 18.2, la condition suffisante sera démontrée si l'on démontre la partie « D est globalement idempotent » Nous traitons du cas « à droite ».
Supposons que $D - D^2$ ne soit pas vide et soit $p \in D - D^2$; considérons $D' = D - \{p; p^2\}$ et définissons dans D une équivalence E de la manière suivante:

1) $\{p, p^2\}$ est une classe.

2) Dans D', on prend la restriction de σ_2, plus petite équivalence simplifiable à droite de D. E est simplifiable à droite sur D. En effet, soit $bx \equiv cx$ (E) Si bx, $cx \in \{p; p^2\}$, on a nécessairement $bx = cx = p^2$. D étant stationnaire, on a, en particulier $bp = cp = p^2$ et d'après la condition (C_1); $\exists m \in D$ tel que $p = bm$ ce qui est en contradiction avec l'hypothèse $p \in D - D^2$.

Donc bx et cx appartiennent à D'; il existe $t \in D$ tel que $bxt = cxt$; d'après la condition (C_1) il existe m et n dans D tels que $b = cm$ et $c = bn$. Si b et c appartiennent à D', ils sont équivalents modulo E par définition. Si b et c appartiennent à $\{p, p^2\}$, on a nécessairement $b = c = p^2$ donc $b \equiv c$ (E) Si enfin, par exemple, $b \in \{p, p^2\}$ et $c \in D'$ on a $b = p^2$, d'où $c = p^2n$ et finalement $p^2 = p^2nm$, ce qui s'écrit encore $p \cdot p = p \cdot pnm$ et entraîne, d'après la condition (C_2): $\exists t \in D$ tel que $p = tpnm$, en contradiction avec l'hypothèse $p \in D - D^2$.

E est simplifiable à droite, donc régulière à droite par hypothèse.
De $p \equiv p^2$ (E) on déduit $p^2 \equiv p^3$ (E) donc $p^3 \in \{p, p^2\}$. Comme $p^3 \neq p$, on a $p^3 = p^2$ ou $p^2 \cdot p = p \cdot p$ et d'après la condition (C_1) $\exists t \in D$ tel que $p = p^2t$ en contradiction avec $p \in D - D^2$.

Finalement, $D - D^2 = \emptyset$, $D = D^2$, D est globalement idempotent. *CQFD.*

BIBLIOGRAPHIE

[1] BAER R. et LEVI F., *Vollständige irreduzibele Systeme Von Gruppenaxiomen*, « Sitz. Heidelberg. Akad. Wissens », t. 2, 1932, p. 3-12 (Beitr. z. Algebra, 18).

[2] CLIFFORD A. H., *Semigroups admitting relative inverses*, « Annals of Math., Series 2 », t. 42, 1941, p. 1037-1049.

[3] CLIFFORD A. H., *Semigroups containing minimal Ideals*, « Amer. J. Math. », t. 70, 1948, p. 521-526.

[4] CLIFFORD A. H. et MILLER D. D., *Semigroups having zeroid elements*, « Amer. J. Math. », t. 70, 1948, p. 117-125.

[5] CLIFFORD A. H., *Semigroups without nilpotent Ideals*, « Amer. J. Math. », t. 71, 1949, p. 834-842.

[6] CROISOT ROBERT, *Propriétés des complexes forts et symétriques des demi-groupes*, « Bull. Soc. Math. France », t. 80, 1952, p. 217-223.

[7] CROISOT ROBERT, *Demi-groupes inversifs et demi-groupes réunions de demi-groupes simples*, « Ann. Scient. Ec. Norm. Sup. », Série 3, t. 70, 1953, p. 361-379.

[8] CROISOT ROBERT, *Equivalences principales bilatères définies dans un demi-groupe*, « Journal de Math. pures et appliquées », t. 36, 1957, p. 373-417.

[9] DUBREIL PAUL., *Contribution à la théorie des demi-groupes*, « I., Mémoires Acad. Sc. Inst. de France », t. 63, 1941, p. 1-52.

[10] DUBREIL PAUL., *Contribution à la théorie des demi-groupes*, « III., Bull. Soc. Math, France », t. 81, 1953, p. 289-306.

[11] DUBREIL PAUL., *Remarques sur les théorèmes d'isomorphisme*, « Comptes rendus de l'Académie des Sciences », t. 215, 1942, p. 239-241.

[12] DUBREIL PAUL., *Algèbre*, tome 1 « Equivalences, Opérations, Groupes, Anneaux, Corps. », 2ème éd, Paris, Gauthiers-Villars, 1954, (Cahiers Scient. 20).

[13] DUBREIL PAUL., *Quelques problèmes d'Algèbre liés à la Théorie des demi-groupes*, « Colloque d'Algèbre supérieure », Bruxelles, 1956, Louvain, Ceuterik, 1957 (Centre belge des recherches mathématiques) p. 29-44.

[14] DUBREIL-JACOTIN M. L., LESIEUR L. et CROISOT R., *Théorie des treillis, « des structures algébriques ordonnées et des treillis géométriques »*, Paris, Gauthiers-Villars, 1953.

[15] KIMURA N., *The structure of idempotent semigroups* (I), « Pacific Journal of Math. », Vol. 8 n° 2, 1958, p. 257-275.

[16] LEVI F. W., *On semigroups*, « Bull. Calcutta Math. Soc. », t. 36, 1944, p. 141-146 et t 38, 1946, p. 123-124.

[17] NUKAMURA K., *On bicompact semigroups*, « Math. J. of Okayama Univ. », Vol. 1, 1952, p. 99-108.

[18] PRESTON G. B., *Inverse semigroups*, « J. London Math. Soc. », t. 29, 1954, p. 396-403.

[19] REES D., *On semigroups*, « Proc. Cambridge Phil. Soc. », t. 36, 1940, p. 387-400 et t. 37, 1941, p. 434-435.

[20] SAÎTO T, *Homomorphisms of a left simple semigroup onto a group*, « Proc. of Japan Acad. », Vol. 34, n° 10, 1958, p. 664-667.

[21] SCHUTZENBERGER MARCEL PAUL., *Sur les homomorphismes d'un demi-groupe sur un groupe*, « C. R. Acad. Sc Paris », t. 246, 1958, p. 2242-2244,

[22] SCHWARZ S., *On the structure of simple semigroups without zero*, « Czechoslovak math. J. », vol. 1, 1951, p, 41-53.

[23] SCHWARZ *On semigroups having a kernel*, « Czechoslovak math. J. », vol. 1, 1951 p. 229-264.

[24] STEINFELD O., *Uber die Quasiideale von Halbgruppen*, « Publ. Math. Debrecen », t. 4, 1955-1956, p. 262-275.

[25] SIOLL R. R., *Homomorphisms of a semigroup onto a group*, « Amer. Math. J. », t. 73, 1951, p. 475-481.

[26] TAMURA T., *All semigroups of order at most* 5, « J. Gakugei Tokushima Univ. », t. 6. 1955, p. 19-39.

[27] TEISSIER MELLE MARIANNE, *Sur les demi-groupes admettant l'existence du quotient d'un côté*, « C. R. Acad. Sc. Paris », t. 236, 1953, p. 1120-1122.

[28] TEISSIER MELLE MARIANNE, *Sur les équivalences régulières dans les demi-groupes*, « C. R. Acad. Sc. Paris », t. 232, 1951, p. 1987-1989.

[29] THEODOSSIS, *Etude, dans un demi-groupe, des complexes formés par un seul élément*, Thèse d'Université, Paris. 1953.

[30] THIERRIN GABRIEL., *Contribution à la théorie des équivalences dans les demi-groupes*, « Bull. Soc. Math. France », t. 83, 1955, p. 103-159 (Thèse Sc. Math. Paris 1954).

[31] THIERRIN GABRIEL., *Demi-groupes inversés et rectangulaires*, « Bull. Acad. Royale de Belgique, Cl. Sc. », 5e série, t. 41, 1955, p. 83-92.

[32] THIERRIN GABRIEL., *Sur la structure des demi-groupes*, « Alger-Mathématiques », t. III, n° 2, 1956.

[33] THIERRIN GABRIEL., *Contribution à la théorie des anneaux et des demi-groupes*, « Comment. Math. Helv. », 32, 1957, p. 93-112.

[34] VAGNER V. V., *Obobscennye Gruppy*, « Doklady Akad. Nauk. SSSR », t. 84, 1952, p. 1119-1122.

Certains résultats de ce travail ont été résumés en quelques Notes de l'auteur aux Comptes rendus de l'Académie des Sciences.

[CR 1] LEFEBVRE PIERRE, *Demi-groupes admettant des complexes nets à droite minimaux*, « C. R. Acad. Sc. Paris », t. 247, 1959, p. 1995-1997.

[CR 2] LEFEBVRE PIERRE, *Sur les sous-demi-groupes nets d'un côté minimaux d'un demi-groupe*, « C. R. Acad. Sc. Paris », t. 248, 1959, p. 173-175.

[CR 3] LEFEBVRE PIERRE, *Sur les groupes homomorphes à un demi-groupe, demi-groupes admettant un groupe homomorphe maximum*, « C. R. Acad. Sc. Paris », t. 248, 1959, p. 2277-2279.

[CR 4] LEFEBVRE PIERRE, *Sur certains théorèmes d'isomorphisme pour les demi-groupes*, « C. R. Acad. Sc. Paris », t. 249, 1959, p. 1995-1997.

[CR 5] LEFEBVRE PIERRE, *Sur la plus fine équivalence simplifiable d'un demi-groupe*, « C., R. Acad. Sc. Paris », t. 251, 1960, p. 1205-1207.

[CR 6] LEFEBVRE PIERRE, *Sur la plus fine équivalence régulière et simplifiable d'un demi-groupe*, « C. R. Acad. Sc. Paris », t. 251, 1960, p. 1265-1267.

RIZET	T	Génétique (ORSAY)
ROUTHIER	T	Géologie appliquée
M.me TONNELAT	T	Relativité
DIXMIER	T	Mathématiques (M.P.C.)
SOUCHAY	T	Chimie (P.C.B.)
AIGRAIN	T	Electrotechnique générale
BRUSSET		Chimie minérale
M. LEVY	T	Physique théorique des hautes Energies (ORSAY)
M.me CHAIX	T	Chimie biologique
M.me HUREL-PY		Biologie Végétale (P.C.B.)
PIAUX	T	Chimie (S.P.C.N.)
BRUN	T	Mécan. expérimentale des fluides
LEDERER	T	Chimie biologique
M.me DUBREIL	T	Mathématiques (Agrég.)
M.me LELONG		Mathématiques (E.N.S.)
BELLAIR	T	Géologie (S.P.C.N.)
COTTE	T	Physique (M.P.C.)
DUBOIS J. E.	T	Chimie (M.P.C.)
LAMOTTE	T	Zoologie (E.N.S.)
MICHEL ANDRÉ		Chimie Minérale (ORSAY)
OLMER	T	Energétique générale
ROUAULT	T	Physique
GAUTHIER	T	Mécánique appliquée
BARCHEWITZ	T	Chimie Physique
BROSSEL		Physique atomique
BUSER		Biologie animale (P.C.B.)
CAMUS		Biologie végétale (P.C.B.)
CASTAING	T	Physique (ORSAY)
CURIEN	T	Minéralogie et Cristallogr.
MOYSE	T	Physiologie végét. (ORSAY)
PANNETIER	T	Chimie (ORSAY)
POSSOMPES	T	Biologie Animale (P.C.B.)
PULLMANN	T	Chimie théorique
TEILLAC	T	Physique Nucléaire et Radioactivité
TONNELAT		Biologie physico-chim.
VILLE	T	Econométrie
WILLEMART		Chimie (P.C.B.)
DODE	T	Chimie (ORSAY)
FREYMANN	T	Physique (S.P.C.N.)
GUINOCHET	T	Biologie Veg. (ORSAY)
ROLLET	T	Chimie (P.C.B.)
M.le JOSIEN	T	Chimie (P.C.B.)
CHEVALLEY	T	Géométrie algébrique et théorie des groupes
ARNOULT	T	Electronique (ORSAY)
CHAPELLE	T	Physique (ORSAY)
DELANGE	T	Mathématiques (ORSAY)
DENY	T	Mathématiques Générales (ORSAY)
GERMAIN	T	Mécanique théorique des fluides
LUCAS G.	T	Géologie
ALLARD	T	Chimie Physique
BERTHELOT	T	Physique Fondamentale des Hautes Energies (ORSAY)
BRICARD	T	Météorologie
M.me ALBE-FESSARD		Psychophysiologie
FRIEDEL		Physique des Solides (ORSAY)
M. JULIA		Chimie Organ. Structurale
LENDER		Biologie Animale (S.P.C.N.) ORSAY
MAGAT		Physico-chimie des rayonnements
M.le QUINTIN	T	Electrochimie
MONOD	T	Biochimie Cellulaire
BENOIT	T	Physiol. Anim. (ORSAY)
DE POSSEL	T	Analyse numérique
CHARLOT	T	Chimie analytique
HAISSINSKY	T	Radiochimie
LEMÉE	T	Physiol. B.M.P.V. (ORSAY)
GUERIN	T	Chimie (ORSAY)
CHATELET M.		Chimie (P.C.B.)
JEAN		Physique (ORSAY)
MATTLER	T	Physique (ORSAY)
MICHEL L.		Physique théor. (ORSAY)
RUMPF		Chimie (P.C.B.)
BERGERARD		Biol. Anim. (S.P.C.N.) (ORSAY)
BERTEIN		Electronique (ORSAY)
BOUISSIERES		Chimie des Radioéléments (ORSAY)
M.me COUTURE		Thermodynamique et Mécanique Physique
ELLENBERGER		Géologie appliquée
FRANC		Biol. Animale (P.C.B.)
SCHNELL		Botanique tropicale (ORSAY)
STOLKOWSKI		Biol. Animale (P.C.B.)
ACHER		Chimie Biol. (ORSAY)
BAUDOIN		Biologie
BEAUMONT		Biologie animale
BLAMONT		Géophysique Ionosphère
BOURREAU		Chimie Organique (ORSAY)
CURIE D.		Biologie Végétale (S.P.C.N.) ORSAY
DURAND-DELGA		Physique (M.G.P.)
FREON		Géologie
HELLER		Physiologie végétale
TORTRAT		Calcul des Probabilités
CAILLEUX		Géologie (S.P.C.N.)
MAGNAN	T	Physique (P.C.B.)
DAUDEL		Mécanique ondulatoire appliquée à la chimie théorique et à la Physique nucléaire
M.le FOURCROY		Biologie Végétale (S.P.C.N.)
BARRAUD		Physiologie Cellulaire
NOIROT		Evolution des êtres organisés
M.me FOURES-BRUHAT	T	Mécan. Analytique et Mécanique céleste
M.le VEIL		Physiologie Générale
LWOFF	T	Microbiologie
SIESTRUNCK		Mécanique physique et expérimentale
LACOMBE	T	Métallurgie (ORSAY)
BROCHARD	T	Physique P.C.B. (ORSAY)
CABANNES	T	Mécanique générale
LESIEUR	T	Mathématiques M.P.C. (ORSAY)
MAZET	T	Mécanique générale (ORSAY)

Secrétaire général R. POULLAIN

DEUXIÈME THÈSE

Propositions données par la Faculté

"Les divers aspects de l'intégration des fonctions numériques „.

Vu et approuvé :

Paris, le 27 décembre 1961

Le Doyen de la Faculté des Sciences,

M. ZAMANSKY

Vu

et Permis d'imprimer :

Le Recteur de l'Académie de Paris,

Jean ROCHE

Tip. Azzoguidi - Via Emilia Ponente, 421-B - Bologna